

*А мир устроен так,
Что всё возможно в нём,
Но после ничего
Исправить нельзя.*

„Этот мир“, Л. Дербенев

Komplementarität deterministischer Vergangenheit und probabilistischer Zukunft als die Quelle der Naturevolution

Version 1.20 (de) vom 24.12.2021

Igor Furgel
(office@furgel.com)

Basierend auf dem (i) Zeit-Ensemble Postulat (Diskretität der Zeit), (ii) auf dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs und (iii) auf dem Postulat der Raumdiskretität wird es gezeigt, dass die Zukunft und die Vergangenheit grundsätzlich unterschiedliche Charaktere haben: Die Zukunft ist probabilistisch und die Vergangenheit – deterministisch.

Aus diesen Grundprinzipien wurde abgeleitet, dass die beobachtbaren und existentfähigen Zustände der Natur nur probabilistisch sein können, so dass das Fortschreiten der Zeit essentiell gerichtet und unumkehrbar ist. Es wird auch gezeigt, dass die gesamte Evolution der Natur grundsätzlich unumkehrbar ist.

Außerdem wird es gezeigt, dass alle dynamischen Gesetze (inkl. klassischer und Quantenmechanik, beider Relativitätstheorien, Elektrodynamik) und Statistische Physik sich aus diesen Grundprinzipien ableiten lassen, wobei eine konkrete Form der dynamischen Gesetze von der Vorstellung über allgemeine Eigenschaften von definierten Koordinatensystemen abhängt.

Es gibt auch einige interessante Nebenergebnisse: Der „physikalische“ Sinn der Eulerschen Zahl sowie ein tieferer Grund für den Unterschied zwischen der Shannon und der thermodynamischen Entropie wurden verständlich.

Es ist möglich geworden, den Begriff „Information“ sowohl konkret als auch abstrakt zu definieren.

Es wurde auch gezeigt, dass die Heisenbergschen Unschärferelationen die Bedingung der Beobachtbarkeit von Zuständen widerspiegeln.

Es wurde außerdem gezeigt, dass Entstehung von selbstorganisierten Objekten und ihren Assoziierungen eher einen sehr wahrscheinlichen Evolutionsweg der Natur darstellt.

Dieser Beitrag adressiert den Kreis der Leser, die sich für Fragen der allgemeinen Physik, der Mikrostruktur der Raumzeit und der verwandten philosophischen Aspekte interessieren.

Das Manuskript dieser Arbeit wurde im Zeitraum vom 17.09.2006 bis 16.12.2008 verfasst.

Diese erste Redaktion wurde veröffentlicht am 05.08.2009 (*„Komplementarität deterministischer Vergangenheit und probabilistischer Zukunft als die Quelle der Naturevolution“*, Version 1.01 (dt), Deutsche Nationalbibliothek, <http://d-nb.info/995851670>).

There is also English edition (*„Complementarity of the Deterministic Past and the Probabilistic Future as the Nature Evolution Source“*, version 1.01 (en) as of June 8th, 2009, Deutsche Nationalbibliothek, published on 05.08.2009, <http://d-nb.info/995850909>).

Der Autor beabsichtigt, diese Arbeit auch auf Russisch zu verfassen. Автор намеревается написать эту работу также в русской редакции (*„Комплементарность детерминистского прошлого и вероятностного будущего как источник эволюции Природы“*).

Inhaltsverzeichnis

1	<i>Ergodenhypothese und Struktur der Zeit</i>	5
1.1	Ergodenhypothese.....	5
1.2	Zeit-Ensemble Postulat: Das Fortschreiten der Zeit kreiert ein Ensemble.....	5
1.3	Mikrostruktur der Zeit: Diskretität des „Zeitflusses“ und Existenz eines Zeitquants..	6
1.4	Ableitung der Ergodenhypothese	6
2	<i>Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs</i>	8
2.1	Beobachtbarkeit von Zuständen als Folge deren probabilistischen Charakters	8
2.1.1	Definition des Begriffs „Unbestimmtheit“	8
2.1.2	Unbestimmtheit und Entropie	8
2.1.3	Unbestimmtheit und Wirkungsquanten: Komplementäre Charaktere der Vergangenheit und der Zukunft.....	10
2.1.4	Anderer Sinn der Heisenbergschen Unschärferelation.....	12
2.1.5	Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs: Die kleinste Wirkung und die maximale Entropie.....	12
2.2	Probabilistische Entwicklung der Natur: Information, Mikrozustände, Alternativen und der Sinn der Eulerschen Zahl	15
2.2.1	Informationswert eines Makrozustands.....	15
2.2.2	Alternativen: Der grundlegende Ansatz.....	16
2.2.3	Dimensionen von Alternativen und ihre Verteilung. Der Sinn der Eulerschen Zahl	18
2.3	Auswahl und Handlung. Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs	20
2.3.1	Operator der Unbestimmtheit und Fortentwicklung der Natur.....	20
2.3.2	Komplementäre Begriffe als Ressource und das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs	22
2.3.3	Universelle Methode für Beschreibung eines Naturphänomens?.....	26
2.4	Entstehung und Auflösung von Universen	26
2.5	Experimentelle (direkte) Überprüfung des Zeit-Ensembles Postulats	31
2.6	Globale Unumkehrbarkeit der Evolution der Natur	31
3	<i>Mikrostruktur des Raums</i>	33
3.1	Raumquanten	33
3.2	Raumtranslationen	34
4	<i>Physikalische Theorien als Folgen des Prinzips des kleinsten Ressourcenverbrauchs</i>	38
4.1	Klassische Dynamik	39
4.2	Quantenmechanik	40
4.3	Relativitätstheorien	44
4.3.1	Spezielle Relativitätstheorie	46
4.3.2	Allgemeine Relativitätstheorie	47
4.4	Elektrodynamik	50
4.5	Statistische Physik	52
5	<i>Zusammenfassung</i>	55
6	<i>Anhang</i>	60
6.1	A.1: Entropie eines Zustandengenerators	60
6.2	A2: Geometrieneutrale Phasentranslations-Gleichung	61

7 *Bibliographie* 63

1 Ergodenhypothese und Struktur der Zeit

1.1 Ergodenhypothese

Die Ergodenhypothese der statistischen Mechanik besteht in der *Annahme*, dass ein zeitlicher Mittelwert dem Ensemblemittelwert gleich ist.

D.h. wenn man eine Observable eines statistischen Systems hinreichend lange beobachtet (misst), bekommt man für diese Observable den gleichen Mittelwert, als wenn man ihren Mittelwert über ein Ensemble aller möglichen simultanen Zustände des statistischen Systems ermittelte.

Die Ergodenhypothese wurde ursprünglich von Ludwig Boltzmann eingeführt¹. Danach wird sich die Zustandstrajektorie eines statistischen Systems im Phasenraum jedem Punkt dieses Phasenraums in endlicher Zeit beliebig annähern.

Das ist keine triviale Frage bzw. nicht selbstverständlich, dass das Mitteln über die Zeit und über das Ensemble zu den gleichen Ergebnissen führen soll. Geht man davon aus, dass diese Gleichheit notwendig ist, lässt sich die Ergodenhypothese aus einem allgemeineren Postulat ableiten, das nachfolgend aufstellt wird.

1.2 Zeit-Ensemble Postulat: Das Fortschreiten der Zeit kreiert ein Ensemble

Postulat P.1 (das Zeit-Ensemble Postulat):

Die Zeit schreitet nicht stetig fort, sondern diskret (in Zeitquanten), und jedes Zeitquant generiert genau einen Mikrozustand der Natur. Dieser diskrete Zeitfluss lässt ein Ensemble von Mikrozuständen entstehen.

Dieses Postulat verwandelt die Ergodenhypothese in eine seiner notwendigen Folgen: Die gleichen Mittelwerte einer Observable beim Mitteln über die Zeit und über das Ensemble stellen keinen Zufall oder keine unergründliche Eigenschaft der Natur dar, sondern sind darauf zurück zu führen, dass der Zeitfluss ein Ensemble entstehen lässt und der Mittelwert über die Zeit faktisch über dieses Ensemble gemessen wird. Das Mitteln über die Zeit *ist* letztendlich das Mitteln über das entsprechende Ensemble; deswegen können auch die Mittelwerte unmöglich ungleich sein. D.h., das Mitteln über die Zeit und über das Ensemble nicht zu den gleichen Ergebnissen, sondern zu *ein und demselben* Ergebnis führt.

Man kann sich fragen, ob das einen Sinn macht, die Ergodenhypothese durch das Zeit-Ensemble Postulat zu ersetzen. Wie wir es weiter sehen werden, macht das insoweit einen Sinn, dass das Zeit-Ensemble Postulat viel mehr Phänomene zu erklären vermag, als die Ergodenhypothese alleine. Das bedeutet, dass das Zeit-Ensemble Postulat einen allgemeineren Charakter hat, als die Ergodenhypothese; die Letztere ist lediglich eine seiner Folgen.

Nun lasst uns das Zeit-Ensemble Postulat und seine Eigenschaften detaillierter betrachten.

¹ und später von Paul Ehrenfest durch die genauere Quasi-Ergodenhypothese ersetzt

1.3 Mikrostruktur der Zeit: Diskretität des „Zeitflusses“ und Existenz eines Zeitquants

Das Zeit-Ensemble Postulat P.1 impliziert das Folgende:

P.1-1: Der Zeitfluss ist nicht stetig, sondern diskret.

P.1-2: Es existiert ein minimales Intervall (Quant) der Zeit. Das definiert sich dadurch, dass die Natur im Rahmen dieses elementaren Zeitintervalls *genau in einem und demselben* Mikrozustand ist und bleibt: Es gibt – per definitionem – keine Zustandsübergänge innerhalb eines Zeitquants.

Unter dem Begriff „Mikrozustand“ versteht man hier einen momentanen Zustand der Natur, der durch die Gesamtheit aller momentanen Werte aller Attribute aller Objekte der Natur beschrieben/bestimmt wird.

So stellt „die Zeit“ *den Abstand* zwischen zwei unterschiedlichen Mikrozuständen der Natur dar. Außerhalb der Zeitquanten existiert der Begriff „Zeit“ nicht, z.B. gibt es keine Zeit zwischen den „benachbarten“ Zeitquanten.

Die Vermutung liegt nahe, dass der Wert des Zeitquants die Planck-Zeit $t_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ s}$ ist; d.h. dass die Natur in einer Sekunde $t_p^{-1} \approx 1,85 \cdot 10^{43}$ Zeitschritte macht.

P.1-3: Das gerade aktuelle Zeitquant ist „die Gegenwart“; alle vorangegangenen Zeitquanten stellen „die Vergangenheit“, alle noch kommenden Zeitquanten – „die Zukunft“ dar.

1.4 Ableitung der Ergodenhypothese

Aus den Eigenschaften P.1-1 – P.1-3 lässt sich die Ergodenhypothese sofort ableiten:

Jede Gegenwart (jedes Zeitquant) generiert genau einen Mikrozustand der Natur; d.h. dass es nach N Zeitschritten auch N Mikrozustände gibt, also ein Ensemble dieser Mikrozustände bestehend aus N Elemente (Mikrozustände). Man kann sagen, dass der „Zeitfluss“ dieses Ensemble generiert.

Deswegen stellt das Mitteln über die Zeit faktisch das Mitteln über das entsprechende Ensemble dar, das durch den „Zeitfluss“ generiert wurde.

Anmerkung 1: Zu den verwendeten Begriffen:

Ein *Makrozustand* des Ensembles seiner *Mikrozustände* ist der Zustand der Natur nach N Zeitschritten, der beobachtet / gemessen werden kann (mit seinen messbaren, makroskopischen Observablen wie Entropie, Temperatur, Geschwindigkeit etc.);

Der aktuelle Mikrozustand des Ensembles ist dessen aktuelles Element beim Zeitschritt $j \leq N$.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass das Mitteln über ein Ensemble generell eine primäre Operation darstellt, unabhängig davon, welche diskrete Größe – die Zeit oder eine andere Art von „Generatoren“ – dieses Ensemble generiert².

² vgl. die kontroverse Diskussion zwischen Radu Balescu (= das Mitteln über Ensemble sei primär) und Yuri Klimontovich (= das Mitteln über die Zeit sei primär): Balescu hat Recht gehabt.

2 Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs

2.1 Beobachtbarkeit von Zuständen als Folge deren probabilistischen Charakters

2.1.1 Definition des Begriffs „Unbestimmtheit“

Der Begriff „Unbestimmtheit eines Zustands“^{3,4}, den ich hier betrachten möchte, kann für die Beschreibung und das Verständnis einiger Zusammenhänge sehr nützlich sein.

Definition:

Es sei p_j die Wahrscheinlichkeit eines Mikrozustands j . Dann ist die Unbestimmtheit dieses Mikrozustands j

$$u_j \equiv -\ln p_j \quad (2.1).$$

Wenn ein Mikrozustand mit Sicherheit eintritt ($p_j = 1$), dann ist $u_j = 0$ (also seine Unbestimmtheit = 0).

Wenn ein Mikrozustand unmöglich eintreten kann ($p_j = 0$), dann ist $u_j \rightarrow \infty$ (d.h., dieser Zustand ist absolut unbestimmt, weil er ja niemals eintreten kann).

2.1.2 Unbestimmtheit und Entropie

Wie hängt der Begriff „Unbestimmtheit“ mit dem Begriff „Entropie“ zusammen?

2.1.2.1 Shannon-Entropie

Es kann für bestimmte Situationen sinnvoll sein, zwischen der *thermodynamischen* Unbestimmtheit und der *Informationsunbestimmtheit* zu unterscheiden: Die thermodynamische Unbestimmtheit ist durch (2.1) definiert; die Informationsunbestimmtheit $\equiv -\log_2 p_i$.

Nach dieser Definition der Informationsunbestimmtheit ist die Shannon-Entropie als die gewichtete (mittlere) Unbestimmtheit eines Ensembles von Mikrozuständen⁵ anzusehen:

$$\mathcal{E}_N(\text{Shannon}) \equiv -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \equiv \sum_{i=1}^N p_i u_i \quad (2.2)$$

³ oder eines Ereignisses

⁴ Englisch: „Indeterminacy or uncertainty of a state“; Russisch: „неопределённость состояния“

⁵ man spricht auch von „lokalen“ Zuständen

(die Unbestimmtheit u_i des Zustands i tritt mit einer Wahrscheinlichkeit p_i auf und wird somit auch mit p_i gewichtet).

Im Weiteren werde ich nur die thermodynamische Unbestimmtheit (2.1) verwenden, was in Abschn. 2.2.3 begründet wird.

2.1.2.2 Mikrokanonische Zustandsumme

Die mikrokanonische Zustandsumme wird als $\Omega_i \equiv p_i^{-1}$ definiert, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit des Mikrozustands i ist.

Dann ist die lokale thermodynamische Entropie

$$\mathcal{E}_i \equiv k_B \ln \Omega_i = k_B (-\ln p_i) = k_B u_i,$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Also

$$\mathcal{E}_i = k_B \cdot u_i. \quad (2.3)$$

2.1.2.3 Quantenmechanische Entropie eines Makrozustands

Die quantenmechanische Entropie für ein Ensemble von Mikrozuständen lässt sich wie folgt errechnen:

$$\mathcal{E} \equiv -k_B \langle \ln \rho \rangle = -k_B \text{Sp}(\rho \ln \rho) = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = k_B \sum_i p_i u_i,$$

wobei $\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$ der Dichteoperator ist⁶.

Also

$$\mathcal{E} = k_B \sum_i p_i u_i = \sum_i p_i \mathcal{E}_i \quad (2.4)$$

für ein Ensemble von Mikrozuständen.

Die Ausführungen in Abschn. 2.1.2.1, 2.1.2.2 und 2.1.2.3 zeigen, dass sowohl die Informationsentropie (Shannon) als auch die thermodynamische Entropie ein Maß der Unbestimmtheit darstellen. Das ist keine neue Erkenntnis, sondern eine Bestätigung dafür, dass der hier eingeführte Begriff der Unbestimmtheit sinnvoll ist.

Vergleicht man (2.2) mit (2.4), wird es offensichtlich, dass die Informationsentropie (Shannon) und die thermodynamische Entropie in der „Sprache“ der Unbestimmtheit gleich sind (bis auf die normierende Boltzmann-Konstante k_B).

⁶ Der Erwartungswert einer Observablen ist gegeben durch $\langle A \rangle = \text{Sp}(\rho \cdot A)$.

2.1.3 Unbestimmtheit und Wirkungsquanten: Komplementäre Charaktere der Vergangenheit und der Zukunft

In stationären Makrozuständen (wo der beobachtbare Makrozustand eines Systems erhalten bleibt)

$$p_j(\text{ampl}) \sim e^{i\Delta\Phi_j}, \quad (2.5)$$

wobei p_j die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Übergangs aus dem Mikrozustand $(j-1)$ in den Mikrozustand j (also die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Mikrozustands j) darstellt und $\Delta\Phi_j \equiv \Phi_j - \Phi_{j-1}$ – die Phasenänderung beim Übergang aus dem Mikrozustand $(j-1)$ in den Mikrozustand j (s. z.B. (6.5) in Anhang A.2, Abschn. 6.2 oder [6], Kap. 17 „Symmetry and conservation laws“).

Dann ist die Unbestimmtheitsamplitude des Mikrozustands j $u_j(\text{ampl}) \equiv -\ln p_j(\text{ampl}) \sim -i\Delta\Phi_j = -i\frac{S_j}{\hbar}$, wobei S_j die Wirkung darstellt, die das System braucht, um aus dem Mikrozustand $(j-1)$ in den Mikrozustand j zu kommen.

Also

$$\frac{S_j}{\hbar} \sim iu_j(\text{ampl}), \quad (2.6)$$

wobei $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$.

Der Quotient $\frac{S_j}{\hbar}$ stellt die Anzahl der Wirkungsquanten dar. Das bedeutet, dass das Ergebnis (2.6) wie folgt zu lesen ist:

Die Anzahl der Wirkungsquanten, die für Entstehung eines Mikrozustands j notwendig sind, ist proportional der Unbestimmtheitsamplitude dieses Mikrozustands.

Für die Kreierung eines absolut unwahrscheinlichen Mikrozustands ($p_j = 0$, $u_j \rightarrow +\infty$) würde die Natur unendlich viele Wirkungsquanten $\frac{S_j}{\hbar}$ brauchen⁷; deswegen können solche Mikrozustände⁸ unmöglich existieren.

Für die Kreierung eines deterministischen Mikrozustands ($p_j = 1$, $u_j = 0$) würde die Natur kein einziges Wirkungsquant brauchen ($\frac{S_j}{\hbar} = 0$)⁹. Solche Zustände, für deren Kreierung gar keine Ressourcen notwendig sind (und die Wirkung verhält sich wie eine „Ressource“ der

⁷ Wenn die Amplitude einer Größe unendlich ist, ist auch die Größe selbst unendlich

⁸ und, natürlich, auch Makrozustände, die ein Ensemble von diesen Mikrozuständen darstellen.

⁹ Wenn die Amplitude einer Größe gleich Null ist, ist auch die Größe selbst gleich Null.

Natur; mehr darüber in Abschn. 2.3.2 weiter unten), stellen eine leere Menge dar und sind daher (grundsätzlich!) nicht beobachtbar.

Aus dem Ausdruck (2.6) folgt, dass für die existenzfähigen und beobachtbaren Zustände das Folgende gilt:

$$0 < u_j < \infty. \quad (2.7)$$

Die erste Ungleichung $0 < u_j$ gewährleistet die Beobachtbarkeit, die Zweite $u_j < \infty$ – die Existenzfähigkeit von Zuständen.

Man kann aus diesen Überlegungen zwei Gründe für Nichtsein eines Zustands ableiten:

- i) dieser Zustand setzt unendlich viele Ressourcen der Natur voraus und ist daher unerreichbar oder
- ii) er stellt eine leere Menge dar und ist folglich unbeobachtbar.

Da – per definitionem – $p_j \equiv e^{-u_j}$ (s. (2.1)), gilt es für die Wahrscheinlichkeit eines beobachtbaren und existenzfähigen Zustands (aus (2.7)):

$$0 < p_j < 1. \quad (2.8)$$

Das bedeutet, dass **beobachtbare und existenzfähige Zustände nicht deterministisch sein können; also müssen sie probabilistisch sein! Die Zukunft ist probabilistisch.**

Die **Vergangenheit** ist dagegen mit Sicherheit **deterministisch**, weil alle Entscheidungen über diesen oder jenen Mikrozustand dort bereits getroffen sind: In der Vergangenheit hat alles bereits stattgefunden, sie stellt eine Art des Ereignisprotokolls der Natur dar.

Auf die Gegenwart sind diese Begriffe nicht direkt anwendbar: Die Gegenwart dürfte eine deterministisch-probabilistische Synthese darstellen, weil sie probabilistisch entsteht und deterministisch abtritt.

Eine unmittelbare Folge der grundsätzlich unterschiedlichen, komplementären Charaktere der Zukunft und der Vergangenheit (probabilistisch vs. deterministisch) ist, dass **der Zeitfluss gerichtet und unumkehrbar ist** (s. Abschn. 2.6 zu diesem Thema).

Es ist grundsätzlich unmöglich, die Vergangenheit probabilistisch und die Zukunft deterministisch zu gestalten: Das, was bereits geschehen ist, kann unmöglich probabilistisch sein, weil alle Entscheidungen bereits getroffen wurden; alles, was noch geschehen kann, muss probabilistisch sein, um beobachtbar und existenzfähig zu sein.

Das bedeutet, dass eine bestimmte Richtung des Zeitflusses weder ein Zufall noch eine Fluktuation, sondern eine notwendige Folge der unterschiedlichen, komplementären Charaktere der Zukunft und der Vergangenheit ist.

2.1.4 Anderer Sinn der Heisenbergschen Unschärferelation

Im Lichte dieser Überlegungen lassen sich die Heisenbergschen Unschärferelationen neu interpretieren. Tatsächlich,

$$\Delta t_j \Delta E_j \geq \hbar \Rightarrow \Delta S_j \geq \hbar \Rightarrow \frac{\Delta S_j}{\hbar} \geq 1.$$

Diese Form der Unschärferelation sagt aus, dass die Natur zumindest ein Wirkungsquant aufzuwenden hat, um einen Mikrozustand entstehen zu lassen. Dies entspricht völlig der Schlussfolgerung aus Abschn. 2.1.3, dass für die beobachtbaren Zustände $u_j > 0$ und,

folglich, $\frac{S_j}{\hbar} > 0$ ist: Da $\frac{S_j}{\hbar}$ die *Anzahl* der Wirkungsquanten ist, ist die notwendige

Bedingung der Beobachtbarkeit $\frac{S_j}{\hbar} > 0$ äquivalent der Bedingung $\frac{S_j}{\hbar} \geq 1$ ¹⁰.

D.h., dass die Heisenbergschen Unschärferelationen die Bedingung der Beobachtbarkeit von Zuständen widerspiegeln, und somit ihre Eigenschaft, probabilistisch zu sein (vgl. (2.8), $p_j < 1$).

2.1.5 Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs: Die kleinste Wirkung und die maximale Entropie

Aus (2.6), (2.7), und (2.8) folgt, dass die existenzfähigen und beobachtbaren Zustände eine *endliche* Menge $\frac{S_j}{\hbar}$ an Wirkungsquanten brauchen, um erzeugt zu werden (d.h. im Allgemeinen eine endliche Menge an Ressourcen, weil Wirkung eine integrale Naturressource darstellt; mehr darüber in Abschn. 2.3.2 weiter unten).

Postulat P.2 (das Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs):

Ensembles von Mikrozuständen (also Makrozustände) bilden sich so, dass die hierfür notwendige Naturressource am „sparsamsten“ verbraucht wird.

Aus diesem Postulat folgt unmittelbar das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung: Da die Wirkung eine integrale Naturressource ist (s. Abschn. 2.3.2 weiter unten), bilden sich die Ensembles von Mikrozuständen, die durch den Zeitfluss erzeugt werden (vgl. Abschn. 1.2), so, dass die für die Erzeugung des entsprechenden Makrozustands notwendige Wirkung den kleinstmöglichen Wert einnimmt.

Die kleinste Wirkung eines Makrozustands (d.h. auf dementsprechenden Ensemble der Mikrozustände) entspricht weder dem größten noch dem kleinsten Wert der lokalen

¹⁰ damit ein Zustand beobachtbar wird, muss mehr als 0, also mindestens 1 Wirkungsquant aufgewendet werden

Unbestimmtheit u_j (ihre Extremen können es ja gar nicht geben, vgl. (2.7)), sondern einem „optimalen“ (im Sinne des minimalen Ressourcenverbrauchs) Wert von u_j .

Was kann ein solcher optimale Wert der lokalen Unbestimmtheit sein?

Betrachten wir den Ausdruck für die dimensionslose Entropie (vgl. (2.4) und (2.1))

$$\mathcal{E}_N = \sum_{j=1}^N p_j u_j \equiv \sum_j u_j e^{-u_j} \equiv -\sum_j p_j \ln p_j . \quad (2.9)$$

Der Wert der Entropie hängt von der Verteilung der Mikrozustände $j = 1$ bis N des Ensembles auf p_j bzw. u_j ab. D.h., dass der optimale Wert bzw. die optimale Verteilung auf p_j eine solche sein soll, welche den Wert \mathcal{E}_N der Entropie optimiert.

Der Ausdruck in (2.9) hat nur ein Optimum (Extremum), nämlich ein Maximum ($\mathcal{E} = \ln Z$), und dieses Maximum wird erreicht, wenn die Verteilung von Mikrozuständen gleichwahrscheinlich ist (s. Anhang A.1 in Abschn. 6.1):

$$\mathcal{E}(\text{thermodynamische}) \approx \ln Z - \frac{1}{2} \sigma , \quad (2.10)$$

wobei σ die mittelquadratische Abweichung der lokalen Wahrscheinlichkeiten p_j von ihrem gleichwahrscheinlichen Mittelwert darstellt und Z – die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten.

Zusammengefasst lässt es sich behaupten, dass die gleichwahrscheinliche¹¹ Verteilung der Mikrozustände eines Ensembles (also eines Makrozustands) die Entropie des Makrozustands maximiert und die Wirkung (und somit die Ressource), die für seine Erzeugung aufzuwenden ist, minimiert.

Aus diesen Überlegungen folgt **das Prinzip der maximalen Entropie**: Ein Ensemble von Mikrozuständen bildet sich so, dass die Entropie des entsprechenden Makrozustands maximiert wird.

Das Prinzip der maximalen Entropie und das Prinzip der minimalen Wirkung sind äquivalent und lassen sich aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs ableiten.

Aus dem Prinzip der maximalen Entropie lässt sich direkt darauf schließen, dass die entsprechende Entropieproduktion (mittlere Entropieänderung bei jedem Zeitschritt, $P_{\mathcal{E}}$) auch maximal ist. Tatsächlich, nähmen wir an, dass die Entropieproduktion $P_{\mathcal{E}_j}$ bei jedem Zeitschritt j von 1 bis N nicht den maximal möglichen Wert einnähme; dann würde die Entropie des entsprechenden Makrozustands $\mathcal{E}_N = \sum_{j=1}^N P_{\mathcal{E}_j}$ auch nicht maximiert. D.h., dass die

¹¹ Unter der „gleichwahrscheinlichen Verteilung“ sollte man hier eine solche Verteilung verstehen, die gewährleistet, dass die mittelquadratische Abweichung σ in (2.10) vernachlässigbar ist ($\sigma \ll \ln Z$). Das schließt sowohl die streng gleichwahrscheinliche Verteilung als auch eine Menge anderer Verteilungen in der Nähe der streng gleichwahrscheinlichen Verteilung ein.

Entropieproduktion $P_{\mathcal{E}}$ bei jedem Zeitschritt ihren maximalen Wert einnehmen muss, um das Prinzip der maximalen Entropie zu erfüllen.

Das Prinzip der maximalen Entropie bedeutet, dass die Anzahl der Möglichkeiten (der Mikrozustände), den finalen Makrozustand der Natur zu realisieren, so schnell wie nun möglich wächst¹². Deswegen kann man bildlich sagen, dass die Natur sich auf dem Wege des kleinsten Widerstands entwickelt, was wiederum die Minimierung der verbrauchten Ressourcen bedeutet.

Die Äquivalenz des Prinzips der maximalen Entropie und des Hamiltonschen Prinzips bedeutet auch, dass das Letztere nicht einfach einen mathematischen Trick darstellt, sondern aus dem Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs und aus der Existenzfähigkeit und der Beobachtbarkeit von Zuständen – also aus dem komplementären Charakter der Vergangenheit und der Zukunft (vgl. Abschn. 2.1.3) – folgt.

Mehr noch: Das Prinzip der maximalen Entropie besagt, dass ein Ensemble von Mikrozuständen sich so bildet, dass die Entropie des entsprechenden Makrozustands maximiert wird. D.h. dass die Natur sich so entwickelt, dass sie maximal mögliche Entropie produziert. Auf anderer Seite, sind das selbstorganisierte Objekte, die maximale Entropie generieren. Daraus können wir schlussfolgern, dass **Entstehung von selbstorganisierten Objekten und ihren Assoziierungen**¹³ eher einen sehr wahrscheinlichen Evolutionsweg der Natur darstellt.

Genauso wie jeder *Erhaltungssatz* eine Folge einer *Symmetrie* ist (Noether-Theorem), ist das Prinzip der maximalen Entropie, das die Art und Weise der *Änderung* eines Zustands (also der *Entwicklung*) bestimmt, u.a. eine Folge der *Asymmetrie / Komplementarität* der Charaktere der deterministischen Vergangenheit und der probabilistischen Zukunft.

Das scheint mir aus philosophischer Sicht eine interessante Beobachtung zu sein: **Symmetrie hängt mit der Erhaltung, Asymmetrie – komplementärerweise – mit der Entwicklung zusammen.**

¹² Maximum der Entropieproduktion

¹³ Biologische Objekte gehören auch der Klasse von selbstorganisierten Objekten an; ihre Assoziierungen stellen Gesellschaften dar.

2.2 Probabilistische Entwicklung der Natur: Information, Mikrozustände, Alternativen und der Sinn der Eulerschen Zahl

2.2.1 Informationswert eines Makrozustands

Stellen wir uns nun die Frage, welche Beziehung zwischen den zwei beieinander liegenden Mikrozuständen besteht: Zwischen der Gegenwart und der ersten Zukunft (= die Gegenwart + 1. Zeitschritt).

Die Zukunft ist probabilistisch (s. Abschn. 2.1.3 weiter oben). Die *wahrscheinlichste* „erste Zukunft“ ist eine solche, dass das Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs am Makrozustand (also am Ensemble aus N Mikrozuständen) erfüllt ist.

Aus dem Postulat abgeleiteten Prinzip der maximalen Entropie folgt, dass die Entropie des Makrozustands nach N Zeitschritten $\mathcal{E}_{j=N}$ sich ihrem maximalen Wert \mathcal{E}_{\max} am schnellsten nähert (d.h. in minimaler Anzahl der Zeitschritte¹⁴). Der Informationswert jedes nächsten Makrozustands ($IV_{j=N} \equiv \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{j=N}$) verringert sich deswegen auch am schnellsten. Das System geht in diesem Fall auch am schnellsten in seinen „symmetrischsten“ Zustand über.

Wenn ein System in seinem „symmetrischsten“ Makrozustand (wo der Informationswert des Makrozustands $IV_{j=N_{\max}} = 0$ ist) angekommen ist, kann sich dieser Makrozustand nicht mehr ändern, weil jeder nächste Makrozustand dem Vorherigen identisch wäre. Folglich – nach der Definition des Begriffs „Zeit“ in P.1-2 in Abschn. 1.3 als den Abstand zwischen zwei unterschiedlichen Mikrozuständen der Natur – wird der Zeitfluss für ein solches System aufhören. Auch der Informationsfluss aus diesem System wird in diesem Moment aufhören, weil $IV_{j=N_{\max}} = 0$ ist.

Das bedeutet, dass wenn ein System in seinem „symmetrischsten“ Makrozustand angekommen ist,

- 1) wird der Begriff der „Zeit“ in diesem System nicht mehr existent sein: Das System wird nur die Gegenwart „kennen“; die Vergangenheit wird das System vergessen haben; die Zukunft wird es für das System nicht mehr geben;
- 2) wird jede Wechselwirkung mit diesem System wegen der Abwesenheit des Informationsflusses daraus unmöglich sein. Das bedeutet, dass dieses System nicht beobachtbar und, folglich, im Zustand des Nichtseins wird.

Der Informationswert jedes nächsten Makrozustands $IV_{j=N} \equiv \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{j=N}$ nach N Zeitschritten lässt sich wie folgt darstellen, s. (2.4):

$$IV_{j=N} \equiv \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{j=N} = k_B \left(\sum_{j=1}^{N_{\max}} p_j u_j - \sum_{j=1}^N p_j u_j \right) = k_B \sum_{j=N+1}^{N_{\max}} p_j u_j = \mathcal{E}_{N+1}^{N_{\max}}, \quad (2.11)$$

¹⁴ Maximum der Entropieproduktion

wobei $\mathcal{E}_{N+1}^{N_{\max}}$ die Entropie aller Mikrozustände des Systems darstellt: angefangen mit dem Zeitschritt $N+1$ und beendet mit dem Zeitschritt N_{\max} , an welchem der Informationswert des letzten Makrozustands $IV_{j=N_{\max}} = 0$ ist.

Das bedeutet, dass der „restliche“ Informationswert eines Systems am Zeitschritt N die gesamte Entropie aller noch in der Zukunft liegenden Mikrozustände des Systems ist.

In anderen Worten, **stellt der „restliche“ Informationswert eines Systems am Zeitschritt N die gewichtete (mittlere) Unbestimmtheit des vollständigen zukünftigen Ensembles von Mikrozuständen des Systems dar**, vgl. Abschn. 2.1.2.

Aus der Formel (2.11) lässt sich eine schlüssige Definition des Begriffs „Information“ ableiten, wobei der Begriff „Unbestimmtheit“ in (2.1) eingeführt ist, s. Abschn. 2.1.1:

Information ist die Veränderung des Grades der Unbestimmtheit.

In Abschn. 2.4 wird ausführlicher darauf eingegangen, dass Information der Materie die Form ihrer Existenz gibt: Information strukturiert die Materie, macht sie inhomogen, und somit verändert (verringert) ihren Grad der Unbestimmtheit.

Wenn ein System Information verliert – durch system-interne Prozesse und durch seine Wechselwirkung mit der Außenwelt –, verändert (vergrößert) sich sein Grad der Unbestimmtheit. Hat die Unbestimmtheit eines Systems ihren maximalen Wert erreicht, ist keine Veränderung dieser Größe und, folglich, auch kein Informationsfluss aus diesem System mehr möglich.

2.2.2 Alternativen: Der grundlegende Ansatz

Betrachten wir nun detaillierter die einzelnen Zeitschritte, die die Natur bei ihrer Fortentwicklung macht, d.h. wir betrachten nun jeden einzelnen Mikrozustand des Ensembles ausgehend aus dem aktuellen Zustand der Gegenwart.

Da die Zukunft der Natur probabilistisch ist, muss sie einen bestimmten „Weg“ aus möglichen Alternativen wählen, und zwar so, dass die Entropie des Ensembles maximiert wird (s. Abschn. 2.1.5).

Es kann binäre, trinäre, teträre, usw. Alternativen geben. Nennen wir diese Eigenschaft „Dimension einer Alternative“ α , wobei $\alpha \geq 2$ ist¹⁵.

Die folgende Abbildung illustriert diese Vorstellung:

¹⁵ $\alpha = 1$ würde bedeuten, dass es keine Alternative, sondern eine deterministisch bedingte Entscheidung ist.

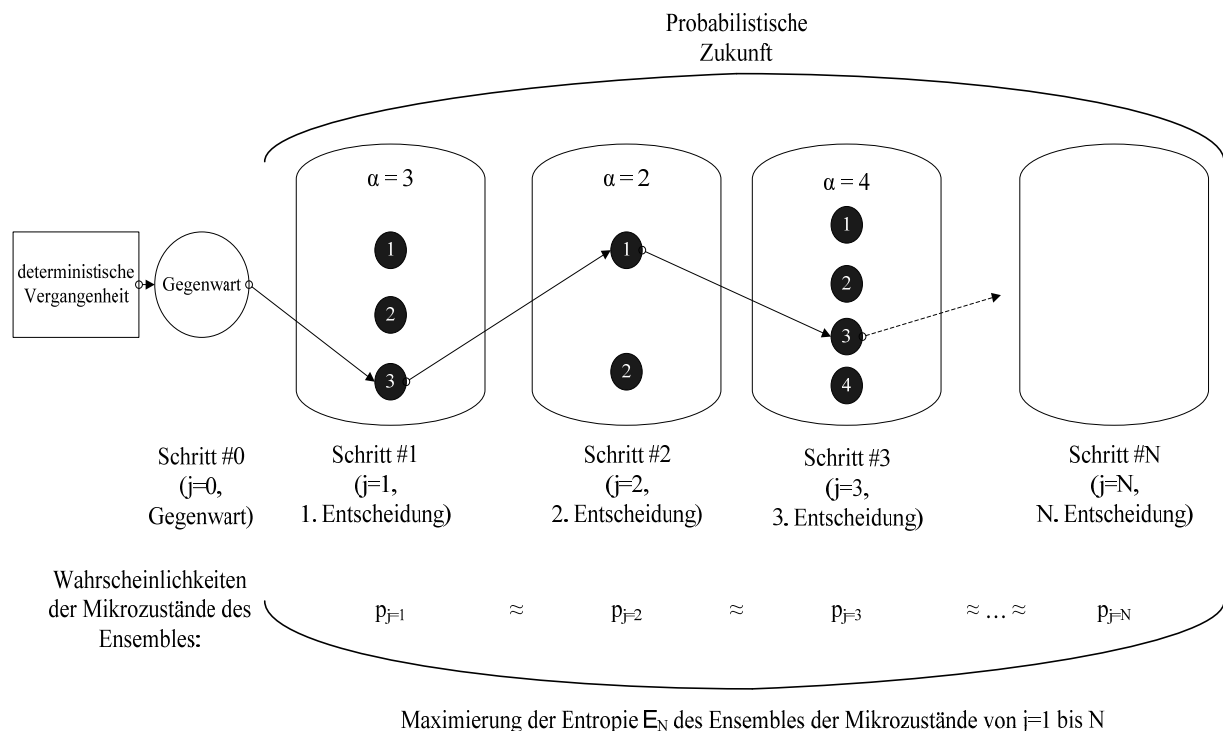


Abbildung 1: Alternativen innerhalb der Mikrozustände eines Ensembles

An dieser Stelle sollen wir weitere verschiedene Arten von Zuständen ausdifferenzieren:

- Der *Mikrozustand einer Alternative* ist die Reihenfolge der Entscheidungsknoten innerhalb der Alternative (z.B. (1)->(2)->(3) wie auf Abbildung 1, die Alternative beim Schritt #1).
Es kann $\alpha!$ solcher Reihenfolgen geben;
- Der (entschiedene) *Makrozustand einer Alternative* ist, dass eine von α möglichen Entscheidungen innerhalb der Alternative getroffen wurde.
Die Reihenfolge der Mikrozustände der Alternative spielt hierbei keine Rolle: Wenn ein konkreter Mikrozustand der Alternative (z.B. #(1) der Alternative beim Schritt #2 wie auf Abbildung 1) die Maximierung der Entropie des Ensembles ermöglicht, wird dieser Mikrozustand #(1) dieser Alternative durch die Natur gewählt, und zwar unabhängig davon, an welcher Stelle der Reihenfolge dieser Mikrozustand #(1) steht.
- Der aktuelle *Mikrozustand j des Ensembles* wurde in Abschn. 1.4 (s. Anmerkung 1 dort) bereits definiert. Er stellt genau den Makrozustand der gerade entschiedenen Alternative dar und ist durch den aktuellen Zeitschritt $j \leq N$ repräsentiert.
- Der *Makrozustand des Ensembles* seiner Mikrozustände ist der Zustand der Natur nach N Zeitschritten, der beobachtet / gemessen werden kann (mit seinen messbaren, makroskopischen Observablen wie Entropie, Temperatur, etc.), vgl. die Definition in Abschn. 1.4, Anmerkung 1.

2.2.3 Dimensionen von Alternativen und ihre Verteilung. Der Sinn der Eulerschen Zahl

Es kann binäre, trinäre, teträre, usw. Alternativen geben. Das bedeutet, dass die jeweilige Dimension α von verschiedenen Alternativen einen der Werte im Bereich $2 \leq \alpha < \infty$ einnehmen kann.

Daraus stellt sich die Frage nach der Verteilung der Dimensionen von Alternativen, der wir hier nachgehen.

Die Zustandssumme $\Omega(\alpha)$ für eine Alternative der Dimension α ist die Anzahl der Mikrozustände der Alternative, die ihren gegebenen Makrozustand realisieren. In einer bereits entschiedenen Alternative¹⁶ gibt es noch $(\alpha - 1)$ Makrozustände, so dass

$$\Omega(\alpha) = \frac{\alpha! [\text{Mikrozustände}]}{(\alpha - 1) [\text{Makrozustände}]}$$

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Makrozustands einer Alternative ($\Omega_i \equiv p_i^{-1}$):

$$\rho(\alpha) \equiv \Omega^{-1}(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha!}$$

D.h. dass die Wahrscheinlichkeit der Existenz einer Alternative der Dimension α ist

$$\rho(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha!} \quad (2.12)$$

Wir überprüfen nun, ob $\rho(\alpha)$ tatsächlich Wahrscheinlichkeiten darstellen kann: Die Summe von allen Werten von $\rho(\alpha)$ muss gleich 1 sein.

Beachtet man, dass

$$e \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \equiv 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \equiv e - 1; \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \equiv e - 2,$$

bekommt man für die gesuchte Summe

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \rho(\alpha) &= \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha - 1}{\alpha!} = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha!} - \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - 1)!} - \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \rightarrow [\alpha - 1 \equiv \beta] \rightarrow \\ &\rightarrow \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{1}{\beta!} - \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} = (e - 1) - (e - 2) = 1. \end{aligned}$$

Also,

$$\sum_{\alpha=2}^{\infty} \rho(\alpha) = 1, \quad (2.13)$$

d.h. $\rho(\alpha)$ können tatsächlich Wahrscheinlichkeiten darstellen.

¹⁶ was ihren Makrozustand darstellt, s. die Definition, Item b) in Abschn. 2.2.2

Der Verlauf der Verteilung (2.12) ist auf der nächsten Abbildung schematisch dargestellt:

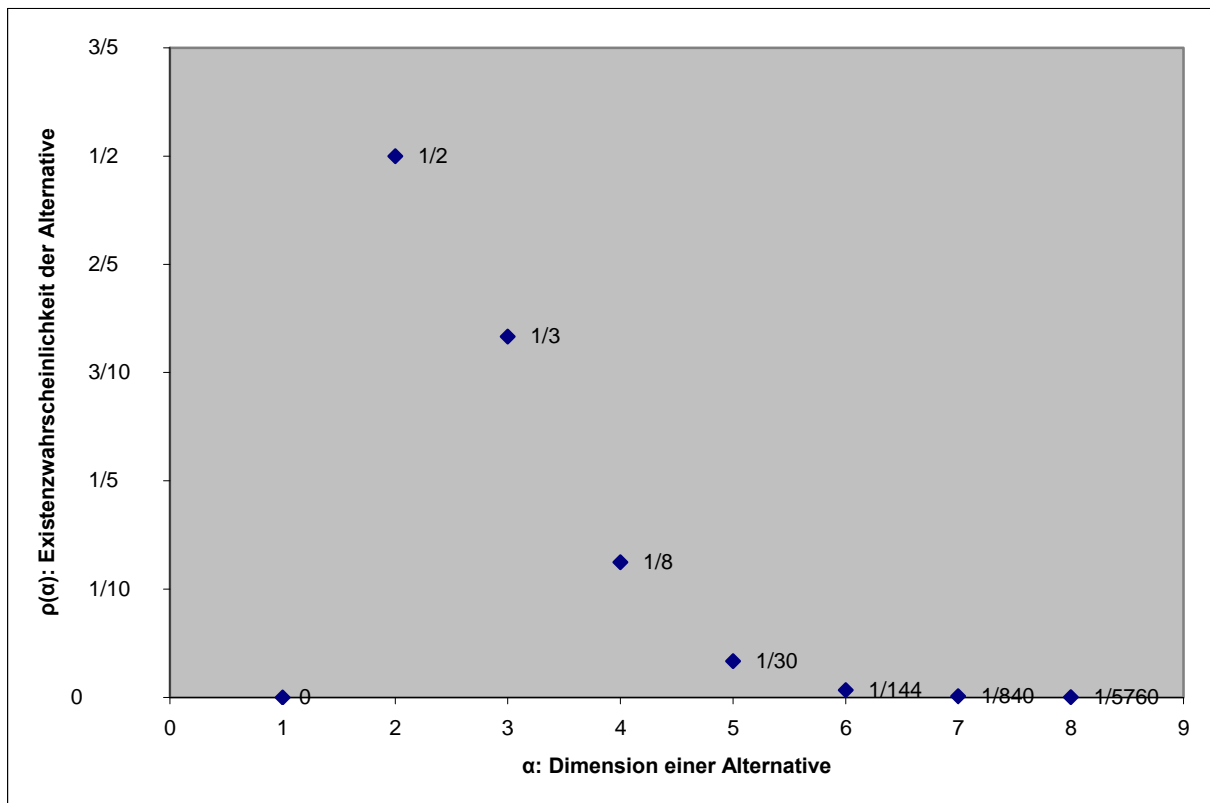


Abbildung 2: Verteilung der Dimensionen von Alternativen

Diese Verteilung $\rho(\alpha)$ zeigt, dass die meisten Alternativen binär sind: Ihre Dimension $\alpha = 2$ und die Existenzwahrscheinlichkeit liegt bei $\frac{1}{2}$. Auch trinäre ($\alpha = 3, \rho(\alpha) = \frac{1}{3}$) und teträre ($\alpha = 4, \rho(\alpha) = \frac{1}{8}$) Alternativen sind häufig anzutreffen.

Interessant ist, dass $\rho(\alpha = 1) = 0$ ist. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit der Existenz einer Alternative der Dimension $\alpha = 1$ gleich Null ist: **Solche deterministischen „Alternativen“ können in der Natur gar nicht existieren! Das bestätigt die Schlussfolgerung aus dem Abschn. 2.1.3, dass die Zukunft probabilistisch ist.**

Nun haben wir die Verteilung der Dimensionen von Alternativen gefunden. Stellen wir uns jetzt die Frage, was die mittlere Dimension aller existierenden Alternativen mit $2 \leq \alpha < \infty$ ist:

$$\bar{\alpha} \equiv \sum_{\alpha=2}^{\infty} \rho(\alpha) \cdot \alpha = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{\alpha-1}{\alpha!} \cdot \alpha = \sum_{\alpha=2}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-2)!} \rightarrow [\alpha-2 \equiv \beta] \rightarrow \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{\beta!} = e \text{ (Eulersche Zahl).}$$

Die mittlere Dimension aller existierenden Alternativen ist einfach die Eulersche Zahl:

$$\bar{\alpha} = e. \quad (2.14)$$

Dieses Ergebnis kann als „physikalischer“ Sinn der Eulerschen Zahl interpretiert werden.

Jetzt ist ein tieferer Grund für den Unterschied zwischen der Informationsentropie (Shannon) und der thermodynamischen Entropie nachvollziehbar (s. Abschn. 2.1.2.1):

- Die Informationsentropie (Shannon) ist auf der Menge ausschließlich der binären ($\alpha = 2$) Alternativen definiert;
- Die thermodynamische Entropie ist auf der Menge aller in der Natur vorkommenden Alternativen ($2 \leq \alpha < \infty$) definiert, und zwar mit ihrer „natürlichen“ Verteilung $\rho(\alpha)$, s. (2.12). Diese „natürliche“ Verteilung (2.12) bedingt den mittleren Wert der Dimension von Alternativen $\bar{\alpha} = e$.

Es sieht so aus, dass der mathematische Apparat der diskreten Markow-Ketten gut geeignet ist, diese Art der Evolution der Natur – das diskrete Fortschreiten der Zeit durch Entscheidungen von Alternativen – mathematisch abzubilden. Diese Möglichkeit wird in dieser Abhandlung nicht weiter verfolgt.

2.3 Auswahl und Handlung. Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs

2.3.1 Operator der Unbestimmtheit und Fortentwicklung der Natur

Um aus einem Makrozustand A des Ensembles in einen Makrozustand B zu gelangen, muss die Natur eine bestimmte Anzahl der Optionen Z_{AB} in N_{AB} Zeitschritten „analysieren“ (s. Abschn. 2.2.2). Diese Anzahl der zu analysierenden Optionen lässt sich als $Z_{AB} = \alpha(j=1) \cdot \alpha(j=2) \cdot \dots \cdot \alpha(j=N_{AB})$ ausrechnen. D.h. dass $Z_{AB} \approx \bar{\alpha}^{N_{AB}}$, wenn N_{AB} hinreichend groß ist, vgl. Abbildung 1 in Abschn. 2.2.2; $\bar{\alpha}$ ist die mittlere Dimension aller existierenden Alternativen, s. Abschn. 2.2.3.

Ähnlicherweise, wenn j den aktuellen Makrozustand einer Alternative bzw. den aktuellen Mikrozustand eines Ensembles darstellt, dann ist $\bar{\alpha}^j$ die ungefähre Anzahl der bis dahin analysierten Optionen (der zu entscheidenden „Wege“), wenn j hinreichend groß ist.

Dann gilt

$$\frac{d}{dj}(\bar{\alpha}^j) = \ln \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}^j = -\ln \bar{\alpha}^{-1} \cdot \bar{\alpha}^j = u_{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha}^j .$$

Hier wurde berücksichtigt, dass $\bar{\alpha}^{-1}$ die mittlere Wahrscheinlichkeit einer Auswahl innerhalb einer Alternative darstellt, d.h. die mittlere Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Knoten innerhalb einer Alternative ausgewählt wurde, sowie die Definition für die Unbestimmtheit (2.1) in Abschn. 2.1.1.

Also

$$\frac{d}{dj}(\bar{\alpha}^j) = u_{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha}^j . \quad (2.15)$$

In dieser Formel stellt j den Raum der Entscheidungen (Handlungen) dar: Jeder Zeitschritt j ist ein Treffen einer Entscheidung über die bevorstehende Alternative; $u_{\bar{\alpha}}$ stellt die mittlere Unbestimmtheit einer Auswahl innerhalb einer Alternative dar.

Das bedeutet, dass der Operator der Unbestimmtheit $u_{\bar{\alpha}}$ in (2.15) das Weiterkommen der Natur im Raum der Entscheidungen (Handlungen) generiert.

So äußert sich auch in dieser konkreten Konstellation der allgemeine philosophische Satz: „Auswahl“ und „Handlung“ stellen eine Antinomie dar, sie sind komplementär.

Da $\bar{\alpha} = e$ (s. (2.14) in Abschn. 2.2.3), ist der mittlere Eigenwert des Operators der Unbestimmtheit

$$u_{\bar{\alpha}} \equiv -\ln \bar{\alpha}^{-1} = \ln e = 1. \quad (2.16)$$

Das bedeutet, dass die mittlere lokale Entropie \mathcal{E}_j jedes einen Zeitschritts 1 Bit groß ist (s. Abschn. 2.1.2.2). Mit anderen Worten, **eine Entscheidung jeder Alternative bringt durchschnittlich 1 Bit Entropie mit sich.**

Auf dem „Weg“ aus einem Makrozustand A in einen Makrozustand B des Ensembles in N_{AB} Zeitschritten muss die Natur exakt N_{AB} Alternativen entscheiden: Sie kann keine einzige *Entscheidung* auslassen, weil es keine Alternativen der Dimension $\alpha = 1$ existieren können, s. Abschn. 2.2.3. Das bedeutet, dass die Natur bei jedem Zeitschritt *zu entscheiden hat*. Geht man davon aus, dass die Natur nur einen ihren Zustandsraum führt (wie es in P.1 postuliert ist), schließt man direkt darauf, dass sie **durchschnittlich 1 Bit Entropie pro Zeitschritt generiert**¹⁷.

Da jede Entscheidung der Natur ihre Entropie um durchschnittlich 1 Bit wachsen lässt, ist die Entropie des Ensembles beim Übergang von A nach B

$$\mathcal{E}_{AB} \approx N_{AB}. \quad (2.17)$$

Die Entropie des Ensembles wächst bei jedem Zeitschritt um durchschnittlich 1 Bit. Dementsprechend verringert sich der Informationswert $IV_{j=N}$ des Makrozustands des Ensembles um durchschnittlich 1 Bit pro Zeitschritt (s. Abschn. 2.2.2).

Dieses Ergebnis lässt sich auch aus anderen Überlegungen herleiten, nämlich aus den Betrachtungen von Mikrozuständen des Ensembles *separat* – in der Zukunft und in der Vergangenheit. Wie in diesem Abschnitt bereits dargelegt, muss die Natur für den Übergang von A nach B in N_{AB} Zeitschritten $Z_{AB} = \alpha(j=1) \cdot \alpha(j=2) \cdot \dots \cdot \alpha(j=N_{AB}) \approx \bar{\alpha}^{N_{AB}} = e^{N_{AB}}$ Optionen „analysieren“. Man kann sich das bildlich so vorstellen, dass der Makrozustand A

¹⁷ Nähme man an, die Natur führte z.B. zwei Zustandsräume, müsste sie dann auch zwei Entscheidungen in jedem Zeitschritt fällen und somit mehr Entropie (durchschnittlich 2 Bits) pro Zeitschritt generieren.

mit dem Makrozustand B durch $e^{N_{AB}}$ theoretisch mögliche Pfade im Zustandsraum verbunden ist.

a) Zukunft (vor dem Treffen aller Entscheidungen)

Vor dem Treffen aller N_{AB} Entscheidungen (also im Makrozustand A des Ensembles, bevor die Natur die erste Alternative „analysiert“ und entschieden hat) sind *alle Makrozustände von allen Alternativen* (noch) gleichwahrscheinlich (das Prinzip der gleichen A-Priori-Wahrscheinlichkeiten), nämlich ungefähr $\bar{\alpha}^{-1} = e^{-1}$ (s. (2.14) in Abschn. 2.2.3). Da jeder theoretisch mögliche Pfad im Zustandsraum von A nach B N_{AB} Alternativen hat, ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, über irgendeinen jeden solchen Pfad von A nach B zu gelangen, $e^{-N_{AB}}$. Da alle theoretisch möglichen Pfade im Zustandsraum gleichwahrscheinlich sind, ist die durch den A->B Übergang zu produzierende Entropie $\mathcal{E}_{AB} = \ln e^{N_{AB}} = N_{AB}$ (s. (6.1) in Abschn. 6.1).

b) Vergangenheit (nach dem Treffen aller Entscheidungen)

Nach dem Treffen aller N_{AB} Entscheidungen (also im Makrozustand B des Ensembles, nachdem die Natur die letzte Alternative „analysiert“ und entschieden hatte) sind die Makrozustände von allen Alternativen nicht mehr gleichwahrscheinlich: Jede Alternative wurde eindeutig entschieden (gemäß P.2, s. Abschn. 2.1.5), so dass die realisierten, entschiedenen Makrozustände der Alternativen wahr ($p_j(\text{entschieden})=1$) und alle restlichen, nicht realisierten Makrozustände der Alternativen unwahr geworden sind. Damit wurde nur einer der $e^{N_{AB}}$ theoretisch mögliche Pfade im Zustandsraum zwischen A und B realisiert. Mit anderen Worten lässt sich das so formulieren, dass jede Alternative am wahrscheinlichsten so entschieden wird, dass die Entropie des Ensembles maximiert wird (s. Abschn. 2.1.5), d.h., die für eine Alternative getroffene Entscheidung sehr wahrscheinlich ist.

Diese Überlegungen lassen die komplementären Charaktere der Vergangenheit und der Zukunft wie folgt kurz fassen:

Ein Akt des Entscheidungstreffens überführt die Zukunft in die Vergangenheit.
--

Daraus lässt sich die Unumkehrbarkeit der Zeit aus einem anderen Aspekt begründen: Ein Revidieren einer getroffenen Entscheidung stellt selbst eine Entscheidung dar und überführt somit weiterhin die Zukunft in die Vergangenheit; d.h., ein Revidieren einer getroffenen Entscheidung kann die Zeit nicht umkehren, s. Abschn. 2.6 zu diesem Thema.

2.3.2 Komplementäre Begriffe als Ressource und das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs

Es wird hier die folgende Hypothese aufgestellt:

Hypothese H.1 (komplementäre Begriffe als Ressource):

Das Produkt von komplementären Begriffen verhält sich immer wie eine „Ressource“.

Um diesen Gedanken zu illustrieren, betrachten wir zwei komplementäre Begriffe:

- (i) Auswahl und
- (ii) Handlung.

Wie in Abschn. 2.3.1 bereits angedeutet (Formel (2.15)), stellen die Zeitschritte j auf dem „Weg“ von einem Makrozustand A zu einem Makrozustand B des Ensembles den Raum der Entscheidungen (Handlungen) dar, wobei jeder Zeitschritt j ein Treffen einer Entscheidung über die bevorstehende Alternative ist, deren mittlere Dimension $\bar{\alpha}$ beträgt¹⁸ (Auswahl innerhalb einer Alternative).

Dann ist die entsprechende Auswahl-Handlung-Ressource (Handlung * Auswahl)

$$R_{AB} \equiv N_{AB} \cdot \bar{\alpha}, \quad (2.18)$$

wobei N_{AB} die Anzahl der Zeitschritten j darstellt, um aus dem Makrozustand A in den Makrozustand B des Ensembles zu gelangen.

Die Fragestellung ist nun: Welche mittlere Dimension $\bar{\alpha}$ minimiert die Ressource R_{AB} ?

Die Ressource $R_{AB}(\bar{\alpha})$ als Funktion von $\bar{\alpha}$ ist

$$R_{AB}(\bar{\alpha}) \equiv N_{AB} \cdot \bar{\alpha} \approx \frac{\ln Z_{AB}}{\ln \bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha}, \quad (2.19)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass $N_{AB} \approx \frac{\ln Z_{AB}}{\ln \bar{\alpha}}$ ist, s. Abschn. 2.3.1.

Die erste Ableitung ist dann $R'_{AB}(\bar{\alpha}) \approx \ln Z_{AB} \cdot \frac{\ln \bar{\alpha} - 1}{\ln^2 \bar{\alpha}}$

Das Extremum der $R_{AB}(\bar{\alpha})$:

$$R'_{AB}(\bar{\alpha}_{\min}) = 0 \Rightarrow \ln \bar{\alpha}_{\min} - 1 = 0 \Rightarrow \bar{\alpha}_{\min} = e,$$

wobei berücksichtigt wurde, dass die Anzahl der Optionen Z_{AB} , die die Natur in N_{AB} Zeitschritten zu „analysieren“ hat, größer 1 (also $\ln Z_{AB} > 0$)¹⁹ sowie $\bar{\alpha} < \infty$ ²⁰ ist.

Also

$$\bar{\alpha}_{\min} = e. \quad (2.20)$$

¹⁸ vgl. (2.14)

¹⁹ Tatsächlich, $Z_{AB} = \alpha(j=1) \cdot \alpha(j=2) \cdot \dots \cdot \alpha(j=N_{AB}) > 1$ wegen der Beobachtbarkeit des Zustands ($u_{\bar{\alpha}} \equiv -\ln \bar{\alpha}^{-1} > 0$, vgl. (2.7)) und der probabilistischen Zukunft, s. Abschn. 2.2.

²⁰ $u_{\bar{\alpha}} \equiv -\ln \bar{\alpha}^{-1} < \infty$ wegen der Existenzfähigkeit des Zustands, vgl. (2.7).

Es ist offensichtlich (vgl. das Verhalten der $R'_{AB}(\bar{\alpha})$), dass $\bar{\alpha}_{\min} = e$ tatsächlich das einzige Minimum der $R_{AB}(\bar{\alpha})$ darstellt.

Das zeigt, dass die kleinste Ressource $R_{AB}(\bar{\alpha})$ dann verbraucht wird, wenn die mittlere Dimension von Alternativen $\bar{\alpha} = e$ ist. Das ist allerdings genau der Fall (s. (2.14) in Abschn. 2.2.3)!

Da $\bar{\alpha} = e$ ist, wird die Ressource $R_{AB}(\bar{\alpha})$, wie sie in (2.18) definiert ist, beim Übergang aus dem Makrozustand A in den Makrozustand B des Ensembles am „sparsamsten“ verbraucht.

Dieses Verhalten der Ressource $R_{AB}(\bar{\alpha})$ entspricht genau dem Postulat P.2 (Abschn. 2.1.5), so dass man zu dem Schluss kommt, dass die hier aufgestellte Hypothese H.1 zumindest plausibel ist.

Wenn man die Hypothese H.1 als *Postulat* umdefiniert, lässt sich daraus – unter Berücksichtigung von (2.14), die durch die „natürliche“ Verteilung (2.12) bedingt ist, – das Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs P.2 ableiten²¹. In diesem Falle griffe die folgende logische Kette:

{die Hypothese über komplementäre Begriffe als Ressource (hier als H.1 behandelt) + die „natürliche“ Verteilung der Dimensionen von Alternativen (2.12)} =>
=> {der Satz über den kleinsten Ressourcenverbrauch (hier als P.2 behandelt)} =>
=> {das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung (und äquivalent das Prinzip der maximalen Entropie)}.

Lasst uns nun die Auswahl-Handlung-Ressource (2.18) weiter analysieren. Der optimierte Wert dieser Funktion bei $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\min} = e$ ist

$$R_{AB}^{opt} \equiv R_{AB}(\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\min}) = N_{AB} \cdot \bar{\alpha}_{\min} = e \cdot N_{AB} \approx e \cdot \mathcal{E}_{AB},$$

wobei (2.17) berücksichtigt wurde. \mathcal{E}_{AB} ist die Entropie des Ensembles der Mikrozustände $j=1 \div N_{AB}$, das beim Übergang aus dem Makrozustand A in den Makrozustand B des Ensembles durch die Zeitschritte generiert wurde. Dem Prinzip der maximalen Entropie nach nimmt \mathcal{E}_{AB} den maximal möglichen Wert ein, s. Abschn. 2.1.5.

Also

$R_{AB}^{opt} \approx e \cdot \mathcal{E}_{AB}^{\max}$	(2.21)
--	--------

Diese Beziehung lässt einige interessante Interpretationen zu.

²¹ Aus dem P.2 folgt ja auch das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung, s. Abschn. 2.1.5.

1) Die Entropie des Ensembles beim Übergang A \rightarrow B lässt sich über die entsprechende Unbestimmtheit wie folgt darstellen (s. (2.4); die Entropie ist hier eine dimensionslose Größe, also ohne den Faktor k_B):

$$\mathcal{E}_{AB} = \sum_{j=1}^{N_{AB}} p_j u_j \approx e^{-1} \sum_{j=1}^{N_{AB}} u_j = e^{-1} u_{AB}, \quad (2.22)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass $p_j \approx \bar{\alpha}^{-1} = e^{-1}$ (s. Abschn. 2.3.1, item a)); die Unbestimmtheit, wie die Entropie, ist eine additive Größe (aus ihrer Definition in Abschn. 2.1.1).

Kombiniert man (2.21) mit (2.22), erhält man für die Ressource

$$R_{AB}^{opt} \approx u_{AB}. \quad (2.23)$$

D.h. wenn die Unbestimmtheit $u_{AB} = 0$ wäre (und das wäre der Fall, wenn $\bar{\alpha} = 1 \neq e$, d.h. wenn die Zukunft deterministisch wäre, s. Abschn. 2.2.3), wäre auch $R_{AB}^{opt} = 0$, also würde die Natur keine Ressourcen brauchen, um den Makrozustand B zu erzeugen. So ein Makrozustand wäre nicht beobachtbar (s. Abschn. 2.1.3).

Wenn die Unbestimmtheit $u_{AB} \rightarrow \infty$, wäre auch $R_{AB}^{opt} \rightarrow \infty$, also würde die Natur unendlich viel Ressourcen brauchen, um den Makrozustand B zu erzeugen. So ein Makrozustand wäre nicht existenzfähig (s. Abschn. 2.1.3).

2) Die Anzahl der Wirkungsquanten $\frac{S_{AB}}{\hbar}$ ist proportional der Unbestimmtheitsamplitude, wie aus (2.6) ersichtlich ist. Dann $\frac{S_{AB}}{\hbar} \sim i u_{AB} (\text{ampl}) \approx i R_{AB}^{opt} (\text{ampl})$, also

$$\frac{S_{AB}}{\hbar} \sim i R_{AB}^{opt} (\text{ampl}) = i \cdot e \cdot \mathcal{E}_{AB}^{\max} (\text{ampl}). \quad (2.24)$$

D.h., dass die Anzahl der Wirkungsquanten für die Erzeugung des Makrozustands B (was der Erzeugung des Ensembles der Mikrozustände $j = 1 \div N_{AB}$ entspricht)

- der minimal notwendigen Ressource (s. dazu auch Abschn. 2.1.3) oder
- dem maximal möglichen Entropiezuwachs

proportional ist.

3) Angenommen, ginge die Natur von A nach B *nicht* so über, dass die dafür notwendige Ressource R_{AB} minimal ist. Dann würde die Entropie der Natur hierbei mehr anwachsen, als ihr maximaler Wert \mathcal{E}_{AB}^{\max} , was einen Widerspruch darstellen würde:

wenn $R_{AB}^{real} > R_{AB}^{opt} \Rightarrow \mathcal{E}_{AB}^{real} [= \frac{R_{AB}^{real}}{e}] > \mathcal{E}_{AB}^{\max}$; allerdings kann diese Beziehung nur so sein:

$$\mathcal{E}_{AB}^{real} \leq \mathcal{E}_{AB}^{\max}.$$

Nähmen wir nun an, dass der Übergang A->B so geschähe, dass der reale Entropiezuwachs *kleiner* als ihr maximaler Wert \mathcal{E}_{AB}^{\max} wäre. Dann wäre die für diesen Übergang real notwendige Ressource kleiner als die minimal notwendige R_{AB}^{opt} , so dass dieser Übergang mangels der Ressource gar nicht möglich wäre:

wenn $\mathcal{E}_{AB}^{real} < \mathcal{E}_{AB}^{\max} \Rightarrow R_{AB}^{real} < R_{AB}^{opt}$; allerdings kann diese Beziehung nur wie folgt sein:
 $R_{AB}^{real} \geq R_{AB}^{opt}$.

Diese Überlegungen zeigen, dass der einzig realisierbare Weg beim Übergang der Natur aus einem Makrozustand A in einen Makrozustand B des Ensembles ein solcher ist, wo die für diesen Übergang notwendige Ressource R_{AB} minimiert und die Entropie des Ensembles der entsprechenden Mikrozustände \mathcal{E}_{AB} maximiert wird. Das bestätigt die Schlussfolgerung aus Abschn. 2.1.5, dass das Prinzip der maximalen Entropie dem Prinzip des minimalen Ressourcenverbrauchs äquivalent ist.

2.3.3 Universelle Methode für Beschreibung eines Naturphänomens?

Die Überlegungen im vorigen Abschnitt lassen mich vermuten, dass man für eine dynamische Beschreibung eines Naturphänomens eine universelle Methode anwenden könnte, nämlich:

- 1) Zu einander komplementäre Begriffe des Naturphänomens auswählen. Diese komplementären Begriffe sollen beobachtbar und messbar sein; sie können auch von anderen messbaren Parametern des Phänomens abhängen.
- 2) Ein Produkt dieser Begriffe und dadurch die zugehörige Ressource dieses Phänomens bilden.
- 3) Das Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2) auf die so gebildete Ressource anwenden.

Als Ergebnis dieser Methode sollte man einen Zusammenhang zwischen den Parametern des Phänomens erhalten, der die Fortentwicklung des Zustands des Phänomens beschreibt.

2.4 Entstehung und Auflösung von Universen

Um dieses Thema behandeln zu können, sollten wir zunächst einen Exkurs in einige philosophische Zusammenhänge machen.

In der Natur gibt es materielle und ideelle Objekte sowie die Prozesse der Wechselwirkung zwischen ihnen.

Zu den materiellen Objekten zähle ich das, was wir üblicherweise Materie nennen. Wir beschreiben sie durch Partikel und/oder Wellen und deren Komplexe. Eine der wichtigsten Eigenschaften von materiellen Objekten ist, dass sie in Zeit und in Raum existieren.

Zu den ideellen Objekten zähle ich im Allgemeinen Information, die die unterschiedlichsten Formen annehmen kann, wie z.B. Naturgesetze oder seelische und geistige Formen. Eine der wichtigsten Eigenschaften von ideellen Objekten ist, dass sie weder den Begriff Zeit noch Raum kennen: *In diesen „Koordinaten“ sind sie „ewig“ und „unendlich“.*

Es gibt eine unzertrennliche gegenseitige Abhängigkeit zwischen den ideellen und materiellen Objekten der Natur:

- Ideelle Objekte (wie z.B. Naturgesetze) lassen sich ausschließlich durch materielle Objekte wahrnehmen: Ohne Existenz von materiellen Objekten hätten die ideellen Objekte keine Gelegenheit, sich bemerkbar zu machen;
- Materielle Objekte wären ohne ideelle Objekte absolut homogen, symmetrisch, so dass sie auf keine Einwirkung von außen reagieren würden. Somit wären die materiellen Objekte nicht beobachtbar, also im Nichtsein.

Der Prozess der Wechselwirkung zwischen den materiellen und ideellen Objekten hat eine unmittelbare Affinität zu Asymmetrie:

- Das Vorhandensein von ideellen Objekten lässt Asymmetrie entstehen;
- Die Existenz von materiellen Objekten, d.h. ihr Dasein, ist ausschließlich im Falle mindestens einer ihrer Asymmetrie beobachtbar: Absolut symmetrische Objekte können auf keine Einwirkung reagieren, denn – um auf eine Einwirkung reagieren zu können – muss eine, dieser Einwirkung affine Asymmetrie vorhanden sein.

So stellt Asymmetrie die Existenzform sowohl für ideelle als auch für materielle Objekte dar. Dies steht im Einklang mit der Schlussfolgerung in Abschn. 2.1.5.

In anderen Worten, Information gibt der Materie die Form ihrer Existenz; Materie gibt der Information den Inhalt ihrer Existenz.

Nun können wir uns dem eigentlichen Thema dieses Abschnitts widmen.

Wie wir in Abschn. 2.3.1 bereits festgestellt haben, verringert sich der Informationswert $IV_{j=N}$ eines Makrozustands des Ensembles um durchschnittlich 1 Bit pro Zeitschritt j . Am Ende dieser Evolution wäre der Informationswert des letzten Makrozustands $IV_{j=N_{\max}} = 0$ und die Natur nicht mehr beobachtbar, s. Abschn. 2.2.2.

Die philosophische Konsequenz dessen wäre, dass ideelle Objekte (z.B. Naturgesetze) sich nicht mehr wahrnehmen ließen, was ihrer „Ewigkeit“ widerspräche.

Aufgrund dieses Widerspruchs kann ich mir ein grundsätzliches Ende der Gesamtschöpfung (der Natur) nicht vorstellen. Vielmehr gehe ich davon aus, dass der materielle Anteil der Natur (das materielle Universum) lediglich seine Formen im Laufe der Zeit wechselt (inkl. Entstehung von anderen Universen), aber niemals komplett verschwindet (d.h. absolut symmetrisch wird).

Man kann sagen, dass die Eigenschaften von ideellen Objekten, „ewig“ zu sein und beobachtbar/wahrnehmbar zu bleiben, dazu führen, dass auch die materiellen Objekte in ihrer Gesamtheit niemals komplett verschwinden. D.h., es wird immer die materiellen Objekte geben, die nicht absolut symmetrisch, also im Dasein sind.

Wie kann dann ein neues „Universum“ entstehen? Wie kann die Natur vermeiden, dass ein bestehendes Universum seinen Informationswert wirklich auf Null reduziert? In einem solchen Fall würde seine Entropie ihren maximal möglichen Wert einnehmen und daher nicht mehr wachsen können. Infolge dessen bliebe jeder nächste Mikrozustand des Ensembles seinem vorherigen gleich, was das Ensemble deterministisch werden ließe (seine Unbestimmtheit wäre gleich Null). Folglich wäre das Universum nicht mehr beobachtbar (s.

Abschn. 2.1.3) und der Begriff der Zeit als der Abstand zwischen zwei unterschiedlichen Mikrozuständen der Natur (s. Abschn. 1.3) auf dieses Universum nicht mehr anwendbar: Das Universum ginge in den Zustand des Nichtseins über.

Hypothese H.2 (Fehlentscheidung als „Universumsgenerator“)

Eine der plausiblen Möglichkeiten, eine solche Entwicklung der Natur (den Tod der Natur) zu vermeiden, ist, dass das jede nächste Universum aus einer *Fehlentscheidung einer Alternative* im „aktuellen“ Universum entsteht.

Was bedeutet eine Fehlentscheidung einer Alternative? Jede Alternative wird am wahrscheinlichsten so entschieden, dass die Entropie des Ensembles maximiert wird (s. Abschn. 2.1.5 und 2.3.1). Eine Fehlentscheidung einer Alternative bedeutet eine Abweichung von diesem Satz: Eine fehl entschiedene Alternative ist solche, wo ein anderer, als der wahrscheinlichste Entscheidungsknoten innerhalb der Alternative gewählt wurde (vgl. Abbildung 1 in Abschn. 2.2.2). D.h., die für die Alternative getroffene Entscheidung eher unwahrscheinlich ist.

Dieser Fehler soll unbedingt früher geschehen sein, als das aktuelle Universum sich ins Nichtsein ($IV_{j=N_{\max}} = 0$) versetzt.

Es sei $j = N_{err}^{(0)}$ die Anzahl der Zeitschritte innerhalb des Ensembles des aktuellen Universums bis zur ersten Fehlentscheidung einer Alternative (wir benutzen hier die Notation $\text{Universum}^{(0)}$, $N^{(0)}$, etc., um die Zugehörigkeit dieser Parameter dem aktuellen Universum kenntlich zu machen; das erste aus dem $\text{Universum}^{(0)}$ „geborene“ Universum und seine Parameter kennzeichnen wir mit $\text{Universum}^{(1)}$, $\text{Parameter}^{(1)}$).

Dann wird das aktuelle $\text{Universum}^{(0)}$ bis dahin $Z(N_{err}^{(0)})$ Entscheidungsoptionen analysiert haben (s. Abschn. 2.3.1):

$$Z(N_{err}^{(0)}) \approx \bar{\alpha}^{N_{err}^{(0)}} = e^{N_{err}^{(0)}} .$$

Die Wahrscheinlichkeit dieser Fehlentscheidung einer Alternative (ein Fehler bei $Z(N_{err}^{(0)})$ analysierten Optionen):

$$p_{err}^{(0)} = Z^{-1}(N_{err}^{(0)}) \approx e^{-N_{err}^{(0)}} . \quad (2.25)$$

Entsteht aufgrund dieser Fehlentscheidung einer Alternative ein neues $\text{Universum}^{(1)}$, ist sein anfänglicher Informationswert (d.h. an seinem Zeitschritt $l=0$, s. Abschn. 2.2.2):

$$IV_{l=0}^{(1)} \equiv \mathcal{E}_{\max}^{(1)} - \mathcal{E}_{l=0}^{(1)} = \mathcal{E}_{\max}^{(1)} = -\ln p_{err}^{(0)} \approx -\ln e^{-N_{err}^{(0)}} = N_{err}^{(0)} .$$

Also

$$IV_{l=0}^{(1)} = \mathcal{E}_{\max}^{(1)} \approx N_{err}^{(0)} . \quad (2.26)$$

D.h., dass die Anzahl der Zeitschritte des aktuellen Universums bis zur ersten Fehlentscheidung einer Alternative den anfänglichen Informationswert eines durch diesen Fehler „geborenen“ Universums bestimmt.

Die Wahrscheinlichkeit der Geburt des Universums⁽¹⁾ $p_G^{(1)}$ ist offensichtlich gleich der Wahrscheinlichkeit der Fehlentscheidung im Universum⁽⁰⁾, die die Geburt des Universums⁽¹⁾ verursacht hat:

$$p_G^{(1)} = p_{err}^{(0)} \approx e^{-N_{err}^{(0)}} = e^{-IV_{l=0}^{(1)}}.$$

Also

$$\begin{aligned} p_G^{(1)} &\approx e^{-IV_{l=0}^{(1)}}, \\ IV_{l=0}^{(1)} &\approx -\ln p_G^{(1)} = u_G^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

D.h., dass die Wahrscheinlichkeit der Geburt $p_G^{(1)}$ eines Universums und sein anfänglicher Informationswert $IV_{l=0}^{(1)}$ eineindeutig zusammenhängen: Je größer die Unbestimmtheit der Geburt $u_G^{(1)}$ ist, desto größer ist auch der anfängliche Informationswert $IV_{l=0}^{(1)}$ des geborenen Universums.

Die Lebensdauer eines Universums ist proportional seinem anfänglichen Informationswert $IV_{l=0}^{(1)}$, weil das Universum bei jedem Zeitschritt ca. 1 Bit Entropie gewinnt und, dementsprechend, 1 Bit seines Informationswerts verliert, s. Abschn. 2.3.1.

Um die Größenordnungen bei diesen Prozessen sich besser vorstellen zu können, nehmen wir an, dass unser aktuelles Universum ca. $3 \cdot 10^{10}$ Jahre (also ca. 10^{18} Sek.) existieren soll. Dann wird das Universum bis dahin ca. $10^{18} \cdot t_p^{-1} = 10^{18} \cdot 1,85 \cdot 10^{43} \approx 10^{61}$ Zeitschritte gemacht haben²². Das bedeutet, dass sein anfänglicher Informationswert $IV_{j=0}^{(0)}$, die Unbestimmtheit seiner Geburt $u_G^{(0)}$, seine maximal mögliche Entropie $\mathcal{E}_{max}^{(0)}$ und die für seine Entstehung aufgebrauchte Ressource R^{opt} (s. Formel (2.21)) ca. 10^{61} Bits betragen. Das ist nach unseren Maßstäben eine gewaltige Ressource. Die Wahrscheinlichkeit, so ein „mächtiges“ Universum entstehen zu lassen, ist sehr gering, s. (2.27).

Aktuelles Universum⁽⁰⁾ übergibt im Moment der Fehlentscheidung dem gerade geborenen Universum⁽¹⁾ den Informationswert in Höhe von $N_{err}^{(0)}$ ($IV_{l=0}^{(1)} \approx N_{err}^{(0)}$, s. (2.26)).

Das ist allerdings genau der Informationswert, den das Universum⁽⁰⁾ bis dahin verloren hat (= Entropie, die es bis dahin gewonnen hat, s. Abschn. 2.3.1). Dem Universum⁽⁰⁾ bleibt dann der restliche Informationswert zur Verfügung, den es möglicherweise bis zum Ende weiter verbrauchen kann.

Das bedeutet u.a., dass der anfängliche Informationswert des geborenen Universums⁽¹⁾ den anfänglichen Informationswert des aktuellen Universums⁽⁰⁾ nicht übersteigen kann. Daraus

²² t_p ist die Planck-Zeit, s. Abschn. 1.3

folgt, dass wenn das Universum⁽⁰⁾ den Fehler am letzten Zeitschritt seines Seins macht, übergibt es dem Universum⁽¹⁾ seinen gesamten anfänglichen Informationswert, so dass das Universum⁽¹⁾ genauso „mächtig“ wird, wie das Universum⁽⁰⁾ war. Geschieht der Fehler früher, wird das neue Universum⁽¹⁾ „kleiner“ als das Universum⁽⁰⁾.

Wenn eine Alternative nach nur wenigen Zeitschritten fehl entschieden wird (d.h. $N_{err}^{(0)}$ ist klein), wird ein sehr „kleines“ Universum geboren mit dementsprechend kleinen anfänglichen Informationswert $IV_{l=0}^{(1)} \approx N_{err}^{(0)}$. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Geburt ist zwar nicht so klein wie bei der Geburt eines „großen“ Universums (s. (2.27)), die Lebensdauer eines solchen kleinen Universums ist aber verschwindend kurz: In wenigen Zeitschritten wird der gesamte anfängliche Informationswert $IV_{l=0}^{(1)}$ aufgebraucht. Damit ein neues Universum ca. 1 Sek. lang existieren kann, muss es ca. $t_p^{-1} = 1,85 \cdot 10^{43}$ Zeitschritte machen können, also soll es den entsprechenden anfänglichen Informationswert $IV_{l=0}^{(1)} \approx 10^{43}$ Bits „vermachtet“ bekommen haben.

Wenn das Universum⁽⁰⁾ nach der Geburt des ersten neuen Universums⁽¹⁾ noch weiter existieren kann, kann es auch weitere Fehler machen und somit auch weitere Universen #2, #3, ... „gebären“. Dabei gilt es offensichtlich:

$$IV_{l=0}^{(1)} + IV_{k=0}^{(2)} + \dots + IV_{q=0}^{(q)} \leq IV_{j=0}^{(0)}.$$

Wie unterscheiden sich diese Universen voneinander?

- Die Form ihrer Naturgesetze wird immer gleich bleiben, weil sie aus dem universellen Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs ableitbar sind.
- Es kann gut sein, dass die konkreten Werte der fundamentalen physikalischen Konstanten eines Universums von seinem anfänglichen (oder auch aktuellen?) Informationswert $IV_{l=0}^{(1)}$ abhängen.
- Da das aktuelle Universum⁽⁰⁾ im Moment der Fehlentscheidung dem gerade geborenen Universum⁽¹⁾ den Informationswert in Höhe von $N_{err}^{(0)}$ übergibt, den das Universum⁽⁰⁾ bis dahin verloren hat²³, liegt die Vermutung nahe, dass das gerade geborene Universum⁽¹⁾ mit dem aktuellen Universum⁽⁰⁾ „parallel“ existiert, allerdings in einem anderen Zustandsraum.

Da jede „Universumsgeburt“ seine eigene Mikrostruktur der Zeit und des Raums kreiert²⁴, dürften diese „parallelen“ Universen nicht miteinander interferierende Mikrostrukturen der Zeit und des Raums (s. Abschn. 1.3 und 3.1) haben und werden infolgedessen gegenseitig nicht wahrgenommen.

Das wäre ein interessantes Programm, die Thesen b) und c) zu widerlegen oder zu bestätigen.

²³ = Entropie, die es bis dahin gewonnen hat, sodass dem Universum⁽⁰⁾ dann der restliche Informationswert zur Verfügung bleibt, den es möglicherweise bis zum Ende weiter verbrauchen kann (s. diesen Abschnitt weiter oben)

²⁴ Jedes Universum führt seinen eigenen Zustandsraum

2.5 Experimentelle (direkte) Überprüfung des Zeit-Ensembles Postulats

Eine experimentelle Überprüfung des Zeit-Ensembles-Postulats P.1 und des Prinzips des kleinsten Ressourcenverbrauchs P.2 ist offensichtlich nur auf kleinen Ensembles von Mikrozuständen (s. Anmerkung 1 in Abschn. 1.4 sowie Abschn. 2.2.2), und, infolgedessen, bei sehr kleinen Zeitspannen bzw. sehr großen Energien möglich.

Hierfür sehe ich den folgenden Grund: Für kleine Ensembles von Mikrozuständen (in der Größenordnung von maximal 10^3 Mikrozuständen) wird die Bedeutung von Fluktuationen wahrnehmbar/messbar. D.h., dass auch die Wahrscheinlichkeit größer wird, dass ein solcher *realisierter* Makrozustand (bestehend aus wenigen Mikrozuständen) vom *erwarteten, wahrscheinlichsten* Makrozustand abweicht.

Gerade der Letztere, **der wahrscheinlichste Makrozustand wird durch physikalische Theorien beschrieben.**

Das bedeutet, dass es für solche kleinen Ensembles von Mikrozuständen wahrscheinlich ist, eine Abweichung eines *realisierten* Makrozustands von seinem *theoretisch erwarteten* Pendant festzustellen. Eine solche Abweichung würde das Zeit-Ensemble-Postulat und das Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs bestätigen.

Die charakteristische Zeitspanne für so ein kleines Ensemble hat die Größenordnung maximal $10^3 \cdot t_p$ Zeitschritte (=Mikrozustände), also $\approx 5 \cdot 10^{-41}$ Sek. Die äquivalenten Energien liegen

im Bereich von mindestens $10^{-3} \cdot E_p \approx 10^{16}$ GeV (die Planck-Energie ist $E_p \equiv \frac{\hbar}{t_p} \approx 1,2 \cdot 10^{19}$

GeV).

Bei solchen kleinen Zeitspannen bzw. großen Energien wird der *realisierte* Makrozustand grundsätzlich immer weniger vorhersagbar (und, daher, auch immer weniger steuerbar/kontrollierbar), weil er ja grundsätzlich probabilistisch ist (s. Abschn. 2.1.3).

2.6 Globale Unumkehrbarkeit der Evolution der Natur

Unumkehrbarkeit der Evolution der Natur ist eine direkte Folge der komplementären Charaktere der Vergangenheit und der Zukunft (s. Abschn. 2.1.3): Da die Zukunft grundsätzlich probabilistisch und die Vergangenheit grundsätzlich deterministisch ist, würde eine Inversion der Richtung des Zeitfortschreitens dazu führen, dass die Zukunft über die bekannte, bereits determinierte Vergangenheit verlief, was ihrem grundsätzlich probabilistischen Charakter widerspräche.

Zu demselben Schluss führt auch die folgende Überlegung (s. Abschn. 2.2.2): Das Fortschreiten der Zeit generiert ein Ensemble von Mikrozuständen nach dem Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2); d.h., dass der Informationswert jedes nächsten Makrozustands des Ensembles sich so schnell wie möglich verringert. Daraus folgt, dass eine Inversion der Richtung des Zeitfortschreitens das möglichst schnelle Wachstum des Informationswerts jedes nächsten Makrozustands der Natur voraussetzen würde. Dafür würde die Natur immer mehr Information, d.h. immer mehr unentschiedener Alternativen brauchen, wessen Quelle im Rahmen eines existierenden Universums es nicht gibt.

Man kann diesen Gedanken noch einfacher ausdrücken:

„Bewegung“ in die Zukunft besteht im immerwährenden Entscheiden von Alternativen und jede bereits entschiedene Alternative (präziser: das Faktum dessen, dass eine Alternative entschieden wurde) ist unumkehrbar.

In diesem Zusammenhang ist die reale Evolution der Natur grundsätzlich unumkehrbar.

Dann stellt sich die Frage, wie diese Schlussfolgerung sich mit den umkehrbaren Gesetzen der Physik (z.B. die Liouvillesche Gleichung, die Schrödingersche Gleichung, etc.) verhält.

Die bekannten physikalischen Dynamikgesetze sind nur deswegen in der Zeit umkehrbar, weil sie *nicht die realisierten*, sondern lediglich *die wahrscheinlichsten* Makrozustände der Natur beschreiben, d.h. die Makrozustände, die durch die erwarteten – und allermeist tatsächlich eintreffenden – Entscheidungen von Alternativen entstünden (s. Abschn. 2.2.2). Auf anderer Seite entstehen die Makrozustände der Vergangenheit, die ja bereits determiniert sind, allermeist aus *den wahrscheinlichsten* Makrozuständen, als sie noch in der Zukunft lagen. In anderen Worten, die Gesetze der Physik beschreiben die bereits entschiedenen Alternativen, die die Makrozustände der Vergangenheit zusammensetzen.

D.h. die bekannten Dynamikgesetze beschreiben die Vergangenheit und lediglich implizit annehmen, dass dieses Verhalten in die Zukunft extrapoliert werden kann.

Eine solche Annahme bleibt allerdings nur unter bestimmten Bedingungen plausibel, z.B. wenn die Makrozustände eines Ensembles aus statistisch vielen Mikrozuständen bestehen, so dass Fluktuationen unbedeutend bleiben²⁵.

²⁵ Interessant sind die relevanten Überlegungen in Ilya Prigogine's „*From being to becoming*“, Kap. 10

3 Mikrostruktur des Raums

3.1 Raumquanten

Postulat P.3 (das Raumquanten Postulat):

Der Raum ist kein Kontinuum, sondern ist diskret. Es gibt ein elementares Element des Raums – das Raumquant (das kleinste Raumintervall).

Zu jedem Zeitschritt – also in jedem Mikrozustand der Natur – nimmt ein materielles Objekt *genau eine* bestimmte Menge von Raumquanten ein.

Das Raumquanten-Postulat P.3 ist verständlicherweise mit dem Zeit-Ensemble Postulat P.1 aus Abschn. 1.2 sehr verwandt. Das ist nicht mehr als konsequent, das Raumquanten-Postulat in dieser Form einzuführen, wenn man die innigste Affinität zwischen Raum und Zeit bedenkt.

Eine direkte Folge der beiden Postulate (P.1 und P.3) ist, dass, **beim Fortschreiten der Zeit um genau einen Zeitschritt (ein Zeitquant), der durch ein Objekt eingenommene Raum sich um höchstens ein Raumquant ändern kann.**

Um diese Folge zu verdeutlichen, lasst uns annehmen, dass beim Fortschreiten der Zeit um genau einen Zeitschritt der durch ein Objekt eingenommene Raum sich um *zwei* Raumquanten ändern würde. Um der Anschaulichkeit willen betrachten wir ein so kleines Objekt, dass das nur ein einziges Raumquant einnimmt.

Da es kein Überspringen von Raumquanten möglich ist, würde diese Annahme bedeuten, dass das Objekt einen Zwischenzustand gehabt haben müsste (den Initialzustand A – im Raumquant #1, den Zwischenzustand – im Raumquant #2 und den finalen Zustand B – im Raumquant #3). Das bedeutet, dass die Natur einen Mikrozustand gehabt hätte, in dem das Objekt im Raumquant #2 war. Das stünde allerdings im Widerspruch zu P.1-2 aus Abschn. 1.3: Die Natur ist und bleibt im Rahmen des elementaren Zeitintervalls *genau in einem und demselben* Mikrozustand; es gibt – per definitionem – keine Zustandsübergänge innerhalb eines Zeitquants. Das bedeutet tatsächlich, dass es unmöglich ist, bei einem einzigen Zeitschritt eine Änderung des Raums um mehr als genau ein Raumquant herbeizuführen.

Ähnlich wie bei dem Zeitquant liegt die Vermutung nahe, dass der Wert des Raumquants die

Planck-Länge $l_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ ist.

Obwohl Raum und Zeit eine große Affinität zu einander haben, gibt es auch grundlegende Unterschiede zwischen ihnen.

Zum einen, wie in Abschn. 2.6 diskutiert wurde, kennt das Fortschreiten der Zeit *nur eine Richtung*, nämlich aus der Vergangenheit in die Zukunft²⁶. Das ist eine direkte Folge der

²⁶ Die Mikrozustände der Natur gehen aus der Zukunft in die Vergangenheit.

komplementären Charaktere der deterministischen Vergangenheit und der probabilistischen Zukunft.

Zum anderen, wie in Abschn. 2.2.2 gezeigt wurde, kann die Zeit auch nicht stehen bleiben. Gesähe das, befände sich das System im absolut symmetrischen Makrozustand, d.h. im Zustand des Nichtseins: Das System wäre dann nicht beobachtbar.

Diese beiden Umstände treffen für den Raum *nicht* zu. Folglich kennt der Raum unterschiedliche Richtungen und gibt es keinen Zwang, dass der durch ein Objekt eingenommene Raum sich bei *jedem* Zeitschritt ändert, d.h. er kann auch unverändert bleiben.

Aus dem Zeit-Ensemble Postulat P.1, dem Raumquanten Postulat P.3 und diesen Überlegungen lassen sich die drei wichtigsten Eigenschaften des Raums ableiten:

- (i) es gibt keinen Zwang, dass der durch ein Objekt eingenommene Raum sich bei *jedem* Zeitschritt ändert, d.h. er kann auch unverändert bleiben;
- (ii) wenn der durch ein Objekt eingenommene Raum sich ändert, dann höchstens um genau ein Raumquant zu einem Zeitschritt;
- (iii) der Raum kennt unterschiedliche Richtungen, d.h., eine Änderung des durch ein Objekt eingenommenen Raums kann in unterschiedlichen Richtungen stattfinden.

Grundsätzliche Anmerkung 2:

Es sei grundsätzlich angemerkt, dass, wenn wir eine Geometrie durch Einführung eines bestimmten Koordinatensystems ins Spiel bringen, es uns bewusst bleiben sollte, dass ein Koordinatensystem ein Artefakt ist: Mit der Einführung eines Koordinatensystems wird eine Menge von Parametern (Koordinaten und ihrer Beziehungen zu einander) eingeführt, die für uns messbar sind (z.B. Länge, Dauer, Winkel, Ladung, etc.) und die durch diese Messbarkeit von uns als Observablen betrachtet werden. Als Artefakt kann ein Koordinatensystem mehr oder minder willkürlich gewählt werden (das ist eher die Frage unserer anthropozentrischen Bequemlichkeit, unserer Messgeräte); u.a. kann ein Koordinatensystem auch kontinuierlich sein.

Weder die Mikrostruktur der Zeit (P.1) noch die Mikrostruktur des Raums (P.3) können durch ein Koordinatensystem, eine Geometrie beeinflusst werden.

3.2 Raumtranslationen

Nun können wir die räumliche Translation, die den o.g. Eigenschaften des Raums entspricht (s. Abschn. 3.1), formalisieren. Um der Anschaulichkeit willen betrachten wir hier ein kleines Objekt, das nur ein einziges Raumquant einnimmt und sich nur eindimensional²⁷ bewegt.

Bei jedem Zeitschritt j kann ein der folgenden Ereignisse bzgl. der Raumtranslation eintreten:

- entweder gibt es keine Bewegung, also keine Raumtranslation: Das Objekt nimmt dasselbe Raumquant ein, wie beim vorherigen Mikrozustand des Ensembles,

²⁷ „Eindimensional“ hat hier *keinen geometrischen* Sinn: Das bedeutet lediglich, dass die aktuelle räumliche Position eines Objekts durch *nur eine* Positionsnummer darstellbar ist (man kann sich das bildlich wie Knoten einer Kette vorstellen)

- oder gibt es eine Raumtranslation um genau ein Raumquant entweder in eine oder in die entgegengesetzte Richtung²⁸ (eindimensionaler Fall): Das Objekt „springt“ in das nächste Raumquant.

Nach N Zeitschritten wird das Objekt

$$N_r = \sum_{j=1}^N r_j \quad (3.1)$$

Raumtranslationen gemacht haben, wobei r_j wie folgt definiert ist:

$r_j = 0$, wenn keine Raumtranslation beim Zeitschritt j stattgefunden hat,

$r_j = +1$, wenn eine Raumtranslation um ein Raumquant (einen Raumschritt) in eine gewählte Richtung (bezeichnen wir sie als „rechts“ - die Positionsnummer des Objekts vergrößert sich) beim Zeitschritt j stattgefunden hat,

$r_j = -1$, wenn eine Raumtranslation um ein Raumquant (einen Raumschritt) in die entgegen gesetzte Richtung (bezeichnen wir sie als „links“ - die Positionsnummer des Objekts verkleinert sich) beim Zeitschritt j stattgefunden hat.

D.h., im Allgemeinen stellt der Vektor r_j eine Folge von Nullen und \pm Einsen dar, z.B. $r_j(1,0,0,0,1,1,-1,0)$. Für dieses Beispiel mit insgesamt 8 Zeitschritten ($N=8$) liegt der Wert für die Raumtranslation N_r bei +2 Raumschritten, d.h. das Objekt hat sich von seiner ursprünglichen Position ($j=0$) um 2 Raumquanten nach „rechts“ entfernt. Bei den Zeitschritten $j=2, 3, 4, 8$ wurden die Raumtranslationen ausgesetzt.

Für zwei spezielle Fälle der Raumtranslation gilt:

a) Wenn für ein Objekt $r_j = 0$ für $\forall j = 1 \div N$, dann aus (3.1) $N_r = 0$ (keine Raumtranslation).

b) Wenn für ein Objekt $r_j = +1$ oder $r_j = -1$ für $\forall j = 1 \div N$, dann $N_r = +N$ bzw. $N_r = -N$. In diesem Fall gibt es bei jedem Zeitschritt genau eine Raumtranslation, was auch den maximal möglichen Wert darstellt: Ein materielles Objekt kann sich nicht schneller bewegen, als genau einen Raumschritt in einem Zeitschritt (s. Abschn. 3.1).

Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit von Raumtranslationen (pro Zeitschritt)

$$v_r(N) \equiv \frac{N_r}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j \quad (3.2)$$

ein *natürliches* Limit hat: Wenn $N_r = \pm N$, ist $v_r(N) = \pm 1$ Raumtranslation pro Zeitschritt.

²⁸ Das ist *keine geometrische* Richtung, sondern eine Richtung auf einer „Kette“: Die aktuelle Positionsnummer eines Objekts kann sich entweder vergrößern oder verkleinern.

Die nächste Frage, die ich betrachten möchte, bezieht sich auf die *relative* Raumtranslation, d.h. darauf, wie eine Raumtranslation von einem Beobachter wahrgenommen wird.

Stellen wir uns gedanklich vor, dass alle Raumquanten eindeutig durchnummeriert sind (#1, #2, #3, ...). Dann ist jede mögliche Raumtranslation registrierbar (wahrnehmbar), und zwar sowohl vom gerade translierenden Objekt als auch von einem anderen, externen Objekt aus. Es ist feststellbar, dass entweder es keine Raumtranslation gegeben hat (die „Positionsnummer“ des aktuellen Raumquants hat sich nicht geändert) oder eine Raumtranslation vorliegt (die „Positionsnummer“ des aktuellen Raumquants unterscheidet sich um 1 von der Vorherigen).

Das widerspricht dem Einsteinschen Relativitätsprinzip **nicht**: Tatsächlich, obwohl jede mögliche Raumtranslation registrierbar ist (die „Positionsnummer“ des aktuellen Raumquants ist immer feststellbar), hängen physikalische Gesetze von einem konkreten Wert dieser „Positionsnummer“ nicht ab; d.h. sie bleiben invariant diesbezüglich.

Es sei hier angemerkt, dass der Begriff „Beschleunigung“ bei dieser Betrachtung nicht anwendbar ist: Der Prozess der Raumtranslation – also das „Springen“ eines Objekts aus einem Raumquant in das nächste Raumquant – ist ein diskreter Prozess, wo es sowohl in Zeit als auch in Raum keine Zwischenzustände geben kann (Postulate P.1 und P.3). Folglich gibt es für solche diskrete „Sprünge“ keine kontinuierliche Geschwindigkeit und, daher, auch keine Beschleunigung (als ihre erste Ableitung).

Nun definieren wir die *relative* Raumtranslation wie folgt: Wenn es entweder beim translierenden Objekt oder beim externen Beobachter eine Raumtranslation stattgefunden hat, dann hat es auch zwischen ihnen eine relative Raumtranslation gegeben. D.h. es gibt immer eine relative Raumtranslation, und zwar immer ± 1 in einem Zeitschritt, es sei denn weder das translierende Objekt noch der externe Beobachter haben beim Zeitschritt j eine Raumtranslation erfahren (dann ist die relative Raumtranslation = 0).

D.h., dass die *relative* Raumtranslation lediglich das *Fakt* abbildet, ob es – bei einem Paar Objekt–Beobachter – entweder beim translierenden Objekt oder beim externen Beobachter beim Zeitschritt j eine Raumtranslation stattgefunden hat.

Diese Definition der *relativen* Raumtranslation lässt sich durch die folgende Additionsregel für r_j abbilden:

Raumtranslation $r_j^{(1)}$ des externen Beobachters	Raumtranslation $r_j^{(2)}$ des translierenden Objekts	<i>Relative</i> Raumtranslation $r_j^{(12)}$
0	0	0
0	+1	+1
0	-1	-1
+1	0	+1
+1	+1	+1
+1	-1	+1
-1	0	-1
-1	+1	-1

Raumtranslation $r_j^{(1)}$ des externen Beobachters	Raumtranslation $r_j^{(2)}$ des translierenden Objekts	Relative Raumtranslation $r_j^{(12)}$
-1	-1	-1

Zur Veranschaulichung dieser Definition möchte ich hier einige Beispiele bringen ($j = 1 \div 5$).

a) Angenommen, $r_j^{(1)}(1,0,0,0,1)$ ($N_r^{(1)} = 2$) und $r_j^{(2)}(1,0,1,1,0)$ ($N_r^{(2)} = 3$). Dann $r_j^{(12)}(1,0,1,1,1)$ ($N_r^{(12)} = 4$).

b) Für $r_j^{(1)}(0,0,0,0,0)$ ($N_r^{(1)} = 0$) und $r_j^{(2)}(1,1,1,1,1)$ ($N_r^{(2)} = 5$) bekommen wir $r_j^{(12)}(1,1,1,1,1)$ ($N_r^{(12)} = 5$).

c) Für $r_j^{(1)}(0,0,0,0,1)$ ($N_r^{(1)} = 1$) und $r_j^{(2)}(1,1,0,0,0)$ ($N_r^{(2)} = 2$) bekommen wir $r_j^{(12)}(1,1,0,0,1)$ ($N_r^{(12)} = 3$).

Diese Definition der relativen Raumtranslation führt dazu, dass sie im Allgemeinen keine linear-additive Größe ist. Wenn z.B. ein Objekt bei jedem Zeitschritt auch eine Raumtranslation erfährt (s. Beispiel b) weiter oben), dann findet eine relative Raumtranslation immer (bei jedem Zeitschritt) statt, und zwar unabhängig von der Raumtranslation eines Beobachters. Im Falle, dass sowohl das Objekt als auch der Beobachter nur „selten“ eine Raumtranslation erfahren (d.h. $r_j^{(1)}$ und $r_j^{(2)}$ überwiegend Nullen als Komponentenwerte haben und sehr lange Vektoren ($N \gg 1$) sind²⁹), ist die Wahrscheinlichkeit sehr groß, dass die seltenen Raumtranslationen (Einsen) bei *unterschiedlichen* Zeitschritten j (also nicht gleichzeitig) stattgefunden haben. In einer solchen Konstellation ist die relative Raumtranslation praktisch linear-additiv, weil die Raumtranslationen (Einsen) des Objekts und des Beobachters sich zeitlich nicht überschneiden (s. Beispiel c) weiter oben).

²⁹ Man sollte nicht vergessen, dass „sehr lange“ Vektoren bei z.B. $N > 1000$ Zeitquanten immer noch lediglich $> 10^{-41}$ Sek. bedeuten.

4 Physikalische Theorien als Folgen des Prinzips des kleinsten Ressourcenverbrauchs

In diesem Kapitel werde ich zeigen, dass mehrere fundamentale Relationen der Physik aus dem Zeit-Ensemble Postulat (P.1), aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2), aus dem Raumquanten Postulat (P.3) und aus Annahmen über eine konkrete Geometrie der Raumzeit abgeleitet werden können.

Wie bereits in Abschn. 2.1.5 diskutiert wurde, lässt sich das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs unmittelbar ableiten, so dass man die weiteren Überlegungen direkt mit dem Hamilton-Prinzip fortsetzen kann.

Dieses Kapitel verfolgt nicht das Ziel, die fundamentalen Gleichungen der Physik aus dem Hamilton-Prinzip *mathematisch exakt* herzuleiten – das findet man in verschiedenen Lehrbüchern. Dieses Kapitel soll vielmehr *qualitativ* aufzeigen, wie man das Hamilton-Prinzip *physikalisch* anwendet, welche stillen oder expliziten Annahmen – unter anderem auch über die Eigenschaften der Raumzeit – man treffen muss und welche Einschränkungen für die daraus resultierenden Abbildungen der Natur diese Annahmen bedeuten, sowie welchen physikalischen Sinn verschiedene physikalische Limite haben.

Geht ein System aus einem Makrozustand A [der Zeitschritt $j=1$] in einen anderen Makrozustand B [der Zeitschritt $j=N$] über, berechnet sich die hierfür notwendige Wirkung³⁰ als

$$S_{AB} = t_p \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad (4.1)$$

wobei $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ die entsprechende Lagrange-Funktion ist, die über alle relevanten Mikrozustände des Ensembles ($j = 1$ bis N Zeitschritten) summiert wird; (q, \dot{q}) sind generalisierte „Koordinaten“ und die zugehörige generalisierte „Geschwindigkeiten“.

Oder, wenn man diese Gleichung durch N teilt und bedenkt, dass $N \cdot t_p = t_{AB}$ ist:

$$\frac{S_{AB}}{t_{AB}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(q, \dot{q}). \quad (4.2)$$

Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung muss die dynamische Gleichung für diese Zustandsänderung die folgende Bedingung erfüllen:

$$\delta S_{AB} = 0, \quad (4.3)$$

wobei δ eine kleine Variation bedeutet und die Zustände A und B fixiert sind.

Führt man ein *kontinuierliches* Koordinatensystem ein, lässt sich die Summe durch ein Integral ersetzen:

³⁰ vorausgesetzt, dass die Planck-Zeit t_p von jedem einzelnen Zeitschritt unabhängig ist

$$S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt . \quad (4.4)$$

Dann gilt für (4.3)

$$\delta S_{AB} = \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = 0 . \quad (4.5)$$

Aus (4.4) und (4.3) ergibt sich die bekannte Lagrange-Gleichung (Differenzierbarkeit vorausgesetzt!), die dynamische Entwicklung des Zustands eines Objekts beschreibt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} . \quad (4.6)$$

Es sei hier angemerkt, dass *Differenzierbarkeit* in diesem Kontext eine *sehr stark einschränkende Eigenschaft* darstellt: Sie bedeutet hier eine Annahme über eine *kontinuierliche* Raumzeit zumindest in einer kleinen Gegend des Differenzierens, was dem im Allgemeinen diskreten Charakter der Raumzeit (Postulate P.1 und P.3) *widerspricht*. Diese Annahme führt auch die *Umkehrbarkeit* der Zeit herbei.

4.1 Klassische Dynamik

Die klassische Mechanik betrachtet Zustände von Objekten an sich als kontinuierlich, d.h. zwischen zwei gegebenen Zuständen eines Objekts findet man immer mindestens einen zusätzlichen Zwischenzustand dieses Objekts.

Auch die Mikrostruktur der Zeit (vgl. Abschn. 1.2) und somit das Zeit-Ensemble-Postulat spielen für die klassische Mechanik, natürlich, keine Rolle, weil die klassische Betrachtung von Vorgängen ein Limit voraussetzt, nämlich $\hbar \rightarrow 0$. Das bedeutet u.a., dass diese

Betrachtung für die Zeitspannen \gg als die Planck-Zeit $t_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,4 \cdot 10^{-44} s$ gültig ist, so dass das diskrete Fortschreiten der Zeit von dieser Betrachtung gar nicht wahrgenommen wird: Der Zeitfluss wird hier als *kontinuierlich* beschrieben. Da eine so definierte Zeitkoordinate die Mikrostruktur der Zeit ignoriert, geht auch die Entscheidung von Alternativen (Abschn. 2.2.2) und somit das Probabilistisch-Sein der Zukunft verloren: Die Zeitkoordinate wird umkehrbar.

Ebenfalls spielt die diskrete Mikrostruktur des Raums (vgl. Abschn. 3.1) für die klassische Betrachtung keine Rolle, weil diese Mikrostruktur beim Limit $\hbar \rightarrow 0$ nicht existieren würde und der Raum ein *Kontinuum* wäre.

Es wird die Euklidische Geometrie angenommen (also ein kontinuierliches, nicht gekrümmtes Koordinatensystem (\mathbf{r}, t)), s. die *Grundsätzliche Anmerkung 2* in Abschn. 3.1.

Interessanterweise, wie man (2.6) in Abschn. 2.1.3 und (2.23) in Abschn. 2.3.2 entnehmen kann, würde das klassische Limit $\hbar \rightarrow 0$ einen unendlich großen Ressourcenverbrauch der Natur bedeuten, wenn die Letztere diese Konstellation $\hbar = 0$ tatsächlich realisiert hätte. Eine kontinuierliche Raumzeit würde – bei einer vollständigen Betrachtung, s. Diskussion in Abschn. 4.3 – das Limit $c \rightarrow \infty$ erzwingen.

Für die klassische Dynamik ist die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T - V$ (T ist kinetische und V – potentielle Energie). Daher können wir die Wirkung S_{AB} wie folgt variieren:

$$\delta S_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} [-m\ddot{q}_{opt} - \nabla V(q_{opt})] \delta q(t) dt,$$

wobei q_{opt} den gesuchten optimalen Verlauf der Bewegungsbahn von A nach B und $\delta q(t)$ – kleine Variation dieser Trajektorie um diesen optimalen Verlauf q_{opt} darstellen. Da $\delta S_{AB} = 0$ unabhängig von dieser Variation $\delta q(t)$ sein muss, bedeutet das, dass

$$[-m\ddot{q}_{opt} - \nabla V(q_{opt})] = 0 \quad (4.7)$$

oder

$$m\ddot{q}_{opt} = -\nabla V(q_{opt}).$$

Diese dynamische Gleichung ist nichts anderes als $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ – das zweite Newtonsche Gesetz.

So kommen wir zum Schluss, dass

- (i) die klassische Dynamik sich aus dem Prinzip des minimalen Ressourcenverbrauchs (P.2) und den impliziten Annahmen über kontinuierliche Zustände von Objekten und die kontinuierliche Raumzeit ableiten lässt;
- (ii) Vorhersagen der klassischen Dynamik solange gültig sind, wie lange Zustände von Objekten und die Raumzeit als kontinuierlich betrachtet werden dürfen, d.h. u.a. wenn $mcr \gg \hbar$ (Kontinuität von Zuständen) sowie $t \gg t_p$ und $r \gg l_p$ (Kontinuität der Raumzeit).

4.2 Quantenmechanik

Die Mikrostruktur der Zeit ist durch das Zeit-Ensemble-Postulat in Abschn. 1.2, die Mikrostruktur des Raums – durch das Raumquanten-Postulat in Abschn. 3.1 festgelegt, wobei dort keinerlei Annahmen über eine konkrete Geometrie gemacht wurden.

Auch die Phasentranslations-Gleichung $i \frac{\Delta C_j(\Phi_j)}{\Delta \Phi_j} = -\sum_k \sigma_{jk}(\Phi_j) C_k(\Phi_k)$ (s. (6.5) in Anhang

A.2, Abschn. 6.2) ist „geometrieneutral“.

Nun führen wir zunächst eine Zeitkoordinate t so ein, dass $t \equiv N \cdot t_p$, wobei N die Zeitschritten und t_p die Planck-Zeit sind. Diese Koordinate muss noch eine weitere Eigenschaft besitzen: Das Differenzieren nach ihr muss möglich sein. Diese Bedingung erfüllt z.B. eine *kontinuierliche* Zeitkoordinate. Diese Eigenschaft steht, natürlich, im direkten Widerspruch zur Definition $t \equiv N \cdot t_p$, was physikalisch lediglich bedeutet, dass die Einführung einer solchen Zeitkoordinate eine Näherung – nämlich das Vernachlässigen der Mikrostruktur der Zeit – ist. Differenzierbarkeit nach t ist auch für Umkehrbarkeit der Zeit in den resultierenden Darstellungen verantwortlich.

Das ist ein grundsätzlicher Widerspruch der „klassischen“ Quantenmechanik: Sie betrachtet diskrete Zustände eines Objekts (durch $\hbar \neq 0$)³¹ in der kontinuierlichen Raumzeit. Da eine so definierte Zeitkoordinate die Mikrostruktur der Zeit ignoriert, geht auch die Entscheidung von Alternativen (Abschn. 2.2.2) und somit das Probabilistisch-Sein der Zukunft verloren: Die Zeitkoordinate wird umkehrbar.

Diese Näherung ist gültig, wenn die Betrachtung für Zeitspannen um mindestens etwa eine Größenordnung größer als die Planck-Zeit $t_p \approx 5,4 \cdot 10^{-44} s$ ist (was schon einen viel besseren Feinheitsgrad darstellt, als das klassische Limit $\hbar \rightarrow 0$). D.h. unter anderem, dass die „klassische“ Quantenmechanik bei kleineren Zeitspannen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$) von der Realität abweichende Vorhersagen machen dürfte.

Es wird die Euklidische Geometrie angenommen (also ein kontinuierliches, nicht gekrümmtes Koordinatensystem (\mathbf{r}, t)), s. die *Grundsätzliche Anmerkung 2* in Abschn. 3.1.

Die Gleichungen der Dynamik im Rahmen der Quantenmechanik lassen sich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung (und, letztendlich, aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs) ableiten (vgl. Kap. 4, Formel (4.5)): $\delta S_{AB} = \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = 0$. Dies wurde erstmals von Richard Feynman ausgeführt, vgl. [7].

Für stationäre Zustände (Zustände ändern sich mit der Zeit, wogegen die Observablen bzgl. der Zeit erhalten bleiben: $\frac{dC_j}{dt} = 0$) eines Systems, das sich gemäß dem Hamilton-Prinzip entwickelt, gilt $-\frac{\partial S}{\partial t} = H$. Setzen wir dies in die Phasentranslations-Gleichung (s. (6.5) in Anhang A.2) ein, erhalten wir die wohlbekannteste quantenmechanische Dynamik-Gleichung für zeitliche Evolution (Schrödinger-Gleichung in der Zeitdarstellung):

$$i\hbar \frac{\partial C_j(t)}{\partial t} = \sum_k H_{jk}(t) C_k(t), \quad (4.8)$$

wobei $H_{jk}(t)$ die Hamilton-Matrix ist; $C_j(t) \equiv \langle j | \psi(t) \rangle$ ist die Amplitude dessen, dass das System sich im Basis-Mikrozustand j zum Zeitpunkt t befindet.

Es sei angemerkt, dass die Gleichung (4.8) der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der klassischen Mechanik affin ist. Das ist auch verständlich, weil sich die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung ebenfalls aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung herleitet. Führt man diese Analogie fort, kommt man zum Schluss, dass die Wirkung S_j dem

Term $-i\hbar \psi_j$ entspricht. Auf anderer Seite $\frac{S_j}{\hbar} \sim iu_j(\text{ampl})$ (s. Formel (2.6) in Abschn. 2.1.3).

Daraus folgt, dass die Wellenfunktion eines Zustands ψ der Unbestimmtheit dieses Zustands u affin ist.

³¹ \hbar spiegelt die Diskretität von Objektzuständen wider.

Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung

Jetzt führen wir auch eine Raumkoordinate r so ein, dass $r \equiv N_r \cdot l_p$, wobei N_r die Raumtranslationen und l_p die Planck-Länge darstellen. Diese Koordinate muss auch das Differenzieren nach ihr ermöglichen. Diese Bedingung erfüllt z.B. eine *kontinuierliche* Raumkoordinate. Exakt wie im Falle mit der Zeitkoordinate, bedeutet das das Vernachlässigen der Mikrostruktur des Raums. Diese Näherung ist gültig, wenn die Betrachtung für Raumabstände um etwa eine Größenordnung größer als die Planck-Länge

$l_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ ist (was schon einen viel besseren Feinheitsgrad darstellt, als das

klassische Limit $\hbar \rightarrow 0$). D.h. unter anderem, dass die „klassische“ Quantenmechanik bei kleineren Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichende Vorhersagen liefern dürfte.

Es ist wohl bekannt, dass die Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung aus der quantenmechanischen Dynamik-Gleichung (4.8) ableitbar ist³². Formal erfolgt dies durch

Einsetzen $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r})$ in (4.8).

Es ist allerdings interessant, dass die Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung sich auch durch *qualitative* physikalische Überlegungen herleiten lässt ([6], Chapter 16 „The dependence of amplitudes on position“).

Wie in Abschn. 2.2.2 diskutiert, bildet die Natur beim Fortschreiten der Zeit ihr Ensemble von Mikrozuständen (durch Auflösung von Alternativen). Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt, dass die einzelnen Mikrozustände des Ensembles fast gleichwahrscheinlich sind. Das ist eine Folge dessen, dass jede Alternative am wahrscheinlichsten so entschieden wird, dass die Entropie des Ensembles maximiert wird (s. Abschn. 2.1.5 und 2.3.1), d.h., die für die Alternative getroffene Entscheidung sehr wahrscheinlich ist.

Da diese Mikrozustände des Ensembles die kleinsten „Einheiten“ der Natur sind (es gibt keine „Zwischenzustände“, vgl. P.1 und P.3), stellen sie *natürliche Basiszustände* (im quantenmechanischen Sinne) der Natur dar.

Um die weitere Darstellung zu veranschaulichen, nehmen wir an, dass die räumliche Bewegung nur entlang einer „Kette“ – abgebildet durch Koordinate x – möglich ist: Der räumliche Mikrozustand des Ensembles „diffundiert“ von einem „Knoten“ der Kette zu einem benachbarten „Knoten“.

Bezeichnen wir $C_j(x_j) \equiv \langle j | \psi \rangle$ als die Amplitude dessen, dass das System sich im Basis-Mikrozustand j (d.h. beim Zeitschritt j) im Knoten x_j der Kette befindet.

Da die Übergänge von einem Mikrozustand des Ensembles zum anderen fast gleichwahrscheinlich sind und kein räumlicher „Knoten“ übersprungen werden kann³³, hängt

³² s. z.B. [7], Kap. 4; [12], Kap. 3, §17

³³ vgl. Abschn. 3.1: „...beim Fortschreiten der Zeit um genau einen Zeitschritt (ein Zeitquant) der durch ein Objekt eingenommene Raum kann sich um höchstens ein Raumquant ändern“

die Amplitude $C_j(x_j)$ praktisch nur von den nächsten „Nachbarn“ der räumlichen Kette – vom Linken und vom Rechten – ab, wobei es keine bevorzugte Richtung gibt.

Nun können wir die Gleichung (4.8) unter allen diesen Annahmen anwenden (statt der Variablen t beim Zeitschritt j verwenden wir hier die ihr entsprechende Ortposition x_j):

$$i\hbar \frac{\partial C_j(x_j)}{\partial t} = E_{jj} C_j(x_j) - E_{(j-1)j} C_{j-1}(x_{j-1}) - E_{(j+1)j} C_{j+1}(x_{j+1}). \quad (4.9)$$

$E_{jj} \equiv E_0$ ist hier irgendein abstrakter Energiewert, wenn es keine räumliche Änderung des Mikrozustands im Knoten x_j gibt (keine Raumtranslationen); $E_{(j-1)j}$ und $E_{(j+1)j}$ sind die Energiewerte, die mit den Raumtranslationen aus dem Knoten x_j in den entsprechenden Knoten x_{j-1} bzw. x_{j+1} zusammenhängen. Da es keine bevorzugte Richtung – links oder rechts – gibt, gilt $E_{(j-1)j} = E_{(j+1)j} \equiv E_1$ (eine Raumtranslation).

Nun formen wir (4.9) wie folgt um:

$$i\hbar \frac{\partial C_j(x_j)}{\partial t} = (E_0 - 2E_1) C_j(x_j) + E_1 [2C_j(x_j) - C_{j-1}(x_{j-1}) - C_{j+1}(x_{j+1})]. \quad (4.10)$$

Entwickelt man nun $C_{j\pm 1}(x_{j\pm 1})$ in die Taylor-Reihe und belässt man die Terme bis einschließlich $(\Delta x)^2$, bekommt man (hier benutzen wir die Differenzierbarkeits-Eigenschaft nach Raumkoordinate):

$$C_{j\pm 1}(x_{j\pm 1}) \approx C_j(x_j) \pm \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x=x_j} \cdot |x_{j\pm 1} - x_j| + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 C}{dx^2} \right|_{x=x_j} \cdot (x_{j\pm 1} - x_j)^2. \quad (4.11)$$

Da E_0 lediglich einen abstrakten Energiewert darstellt, wählen wir diese Kalibrierung so, dass $E_0 - 2E_1 \equiv 0$ ist. Setzen wir diese Kalibrierung und die Entwicklung (4.11) in die Gleichung (4.10) ein, erhalten wir

$$i\hbar \frac{\partial C_j(x_j)}{\partial t} \approx -E_1 \cdot \left. \frac{d^2 C}{dx^2} \right|_{x=x_j} \cdot (x_{j\pm 1} - x_j)^2 = -E_1 \cdot \left. \frac{d^2 C}{dx^2} (\Delta x)^2 \right|_{x=x_j}. \quad (4.12)$$

Der Wert E_1 hängt mit der Wahrscheinlichkeit der Raumtranslationen aus x_j in x_{j-1} bzw. in x_{j+1} zusammen: Wenn $E_1 = 0$ wäre, dann gäbe es keine Raumtranslationen. Wenn $(\Delta x)^2 \rightarrow \infty$, gäbe es auch keine Raumtranslationen.

Der Raumabstand zwischen den benachbarten Knoten x_j und $x_{j\pm 1}$ ist die Planck-Länge l_p . Die Energie einer einfachen Raumtranslation E_1 dürfte im Bereich der halben Planck-Energie liegen $E_1 \approx \frac{1}{2} E_p \equiv \frac{1}{2} m_p c^2$. Daher $E_1 \cdot (\Delta x)^2 \approx \frac{1}{2} E_p l_p^2 = \frac{\hbar^2}{2m_p}$, wobei $m_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$ die Planck-Masse ist.

Endgültig bekommen wir aus (4.12)

$$i\hbar \frac{\partial C_j(x_j)}{\partial t} \approx - \frac{\hbar^2}{2m_p} \cdot \frac{d^2 C(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_j} . \quad (4.13)$$

Die wohlbekannte Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung sieht wie folgt aus:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \psi + V \cdot \psi . \quad (4.14)$$

Dass (4.13) und (4.14) eng verwandt sind, ist offensichtlich.

So kommen wir zum Schluss, dass

- (i) die Schrödinger-Gleichung in der Zeitdarstellung (4.8) sich aus diskreten Mikrozuständen des Ensembles in der Zeit und aus dem Prinzip des minimalen Ressourcenverbrauchs (P.2) ableiten lässt;
- (ii) für die Ableitung der Schrödinger-Gleichung in der Raumdarstellung (4.14) noch die diskreten Mikrozustände des Ensembles im Raum zusätzlich zu berücksichtigen sind;
- (iii) Vorhersagen der „klassischen“ Quantenmechanik bei kleineren Zeitspannen und / oder Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichen dürften. Dies gründet in widersprüchlicher Betrachtung von *diskreten* Mikrozuständen des Ensembles und *kontinuierlicher* Raumzeit. Der mathematische Apparat der diskreten Markow-Ketten mag gut geeignet sein, um auch den diskreten Charakter der Raumzeit abzubilden. Vielleicht lässt sich die quantenmechanische Betrachtung dadurch erweitern.

4.3 Relativitätstheorien

Die Mikrostruktur der Zeit ist durch das Zeit-Ensemble Postulat in Abschn. 1.2, die Mikrostruktur des Raums – durch das Raumquanten-Postulat in Abschn. 3.1 festgelegt, wobei dort keinerlei Annahmen über eine konkrete Geometrie gemacht wurden (s. auch die Anmerkung zu Koordinatensystemen als Artefakten in Abschn. 3.1).

Nun führen wir das folgende Koordinatensystem (r, t) ein:

$$r \equiv N_r \cdot l_p, \quad t \equiv N \cdot t_p,$$

wobei l_p und t_p die Planck-Länge bzw. Planck-Zeit, N und N_r die Zeitschritten bzw. Raumtranslationen sind, vgl. Abschn. 3.2.

Definieren wir nun in diesen Koordinaten die Translationsgeschwindigkeit v_r als

$$v_r \equiv \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{l_p}{t_p} \frac{\Delta N_r}{\Delta N} = c \frac{N_r}{N} = c \cdot \nu_r(N), \quad (4.15)$$

wobei hier (3.2) berücksichtigt wurde.

In Abschn. 3.2 haben wir bereits festgestellt, dass $\nu_r(N)$ ein natürliches Limit hat, nämlich $\nu_r(N) = \pm 1$: Das entspricht der Situation, wo bei jedem Zeitschritt genau eine Raumtranslation stattfindet. Daraus und (4.15) folgt unmittelbar, dass dann auch v_r ein natürliches Limit hat, nämlich $v_r = c$ (absoluter Wert).

Das bedeutet, dass die Translationsgeschwindigkeit v_r einen natürlichen maximalen Wert hat ($v_r = c$), der unter keinen Umständen überschritten werden kann, weil es nicht mehr als genau eine Raumtranslation bei jedem Zeitschritt stattfinden kann³⁴. Ein materielles Objekt kann sich nicht schneller als $\frac{l_p}{t_p} = c$ bewegen³⁵.

Das Einsteinsche Prinzip der Existenz der maximalen Geschwindigkeit für Übertragung von Wechselwirkungen stellt hier eine Folge des Zeit-Ensemble Postulats und des Raumquanten Postulats dar.

Was bedeutet in diesem Zusammenhang das klassische Limit $c \rightarrow \infty$? Das würde physikalisch bedeuten, dass nicht maximal genau eine Raumtranslation, sondern beliebig viele Raumtranslationen zu jedem Zeitschritt möglich wären. Das wiederum würde bedeuten, dass beliebig viele Zwischenzustände zwischen zwei benachbarten Mikrozuständen des Ensembles möglich wären. Das hieße, dass das Zeitquant und / oder das Raumquant beliebig klein sein könnte, was einem Zeit- bzw. Raumkontinuum entspräche. Außerdem würde die Natur für Erzeugung beliebig vieler Zwischenzustände auch beliebig viel Ressourcen brauchen (ca. 1 Bit für jeden Mikrozustand, vgl. Abschn. 2.3.1).

D.h., dass das klassische Limit $c \rightarrow \infty$ keine *diskrete*, sondern eine *kontinuierliche* Raumzeit voraussetzt. Außerdem würde es einen unendlich großen Ressourcenverbrauch der Natur bedeuten, wenn die Letztere diese Konstellation $c \rightarrow \infty$ tatsächlich realisiert hätte. In dieser Beziehung ist das Limit $c \rightarrow \infty$ dem Limit $\hbar \rightarrow 0$ ähnlich (vgl. Abschn. 4.1).

Das ist ein grundsätzlicher Widerspruch in den Relativitätstheorien (sowohl der Speziellen als auch der Allgemeinen): Sie schränken korrekterweise die maximale Geschwindigkeit von Raumtranslationen ein ($c < \infty$)³⁶ und benutzen gleichzeitig und weiterhin die kontinuierliche Raumzeit, was das klassische Limit $c \rightarrow \infty$ bedeutet. Da eine so definierte Zeitkoordinate die Mikrostruktur der Zeit ignoriert, geht auch die Entscheidung von Alternativen (Abschn. 2.2.2) und somit das Probabilistisch-Sein der Zukunft verloren: Die Zeitkoordinate wird umkehrbar.

Genauso wie für die Quantenmechanik ist diese Näherung gültig, wenn die Betrachtung für Zeitspannen bzw. für Abstände um mindestens etwa eine Größenordnung größer als die Planck-Zeit t_p bzw. Planck-Länge l_p ist. D.h. unter anderem, dass die Relativitätstheorien bei kleineren Zeitspannen und/oder Abständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichende Vorhersagen machen dürften.

³⁴ eine Folge der Postulate P.1 und P.3, s. Abschn. 3.1

³⁵ Führt man ein „physikalisch natürliches“ Einheitensystem ein, wo die Größen der Zeit- und Raum-Quanten als Etalone dienen (also $t_p = 1$ und $l_p = 1$), ist die maximal mögliche Translationsgeschwindigkeit $c = 1$ Raumtranslation pro Zeitschritt.

³⁶ allerdings durch ein spezielles Postulat, ohne einen theoretisch-physikalischen Grund hierfür anzugeben

Aus (3.2) mit der Definition der Koordinaten (r, t) weiter oben erhalten wir

$$N_r \equiv v_r(N) \cdot N \Rightarrow \frac{r}{l_p} \equiv v_r(N) \frac{t}{t_p} \Rightarrow r \equiv v_r(N) \cdot c \cdot t,$$

also

$$r \equiv v_r(N) \cdot c \cdot t \quad (4.16)$$

oder

$$r^2 - v_r^2(N) \cdot c^2 t^2 \equiv 0. \quad (4.17)$$

Im Allgemeinen kann r durch weitere Koordinaten x_μ wie folgt dargestellt werden:

$$r^2 \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

wobei $g_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor darstellt.

4.3.1 Spezielle Relativitätstheorie

Es wird die Euklidische Geometrie angenommen (also ein kontinuierliches und nicht gekrümmtes Koordinatensystem (r, t)), s. die *Grundsätzliche Anmerkung 2* in Abschn. 3.1.

Für die flache, Euklidische Geometrie (dreidimensional)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Unter Benutzung der Bezeichnungen $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ und aus (4.17) bekommen wir

$$x^2 + y^2 + z^2 - v_r^2(N) \cdot c^2 t^2 \equiv 0. \quad (4.18)$$

Diese Identität soll gelten unabhängig vom gewählten Koordinatensystem (das ja lediglich ein Artefakt darstellt) und für alle zulässigen Werte von $v_r(N)$, also auch für $v_r(N) = 1$. So bekommen wir die wohlbekannte Ausgangsrelation für das Minkowski-Intervall:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \equiv 0, \quad (4.19)$$

das in allen Koordinatensystemen invariant bleiben soll.

Daraus und unter Anwendung des speziellen Relativitätspostulats³⁷ lassen sich auf eine bekannte Art und Weise alle Transformationsformeln für Koordinaten sowie die Einsteinsche Formel für Addition von Geschwindigkeiten ableiten (s. z.B. [2]).

³⁷ Gesetze der Physik müssen in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben

Die Gleichungen der Dynamik im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie lassen sich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung (und, letztendlich, aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs) ableiten (vgl. Abschn. 4, Formel (4.5): $\delta S_{AB} = \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = 0$).

Die entsprechende Lagrange-Funktion für den relativistischen Fall sieht wie folgt aus:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}} - V_{\text{extern}}(q, \dot{q}), \quad (4.20)$$

wobei $V_{\text{extern}}(q, \dot{q})$ das Potential eines externen Felds ist (s. z.B. [11], Kap. 2, §8-9).

4.3.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Bereits Hilbert, Lorentz und Einstein vermochten, die allgemeine Relativitätstheorie aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung (das wiederum aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs ableitbar ist, s. Abschn. 2.1.5, Postulat P.2) abzuleiten³⁸:

$$\delta S_{AB} = \delta \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt = 0,$$

siehe Abschn. 4, Formel (4.5); $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ ist die Lagrange-Funktion.

Einstein postulierte dies in der Form, dass die Bewegung im 4-D Raum (also in Raumzeit) auf geodätischen Linien stattfindet. Die geodätischen Linien sind die kürzesten Wege von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B und werden wie folgt formal definiert:

$$\delta \int_A^B ds = 0,$$

wobei die Invariante des Intervalls ds in Form $ds^2 \equiv \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ definiert ist ($g_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor).

Allerdings ist eine Bewegung auf einer geodätischen Linie äquivalent einer Trajektorie, die sich aus dem Hamiltonschen Prinzip errechnen lässt, wobei die Lagrange-Funktion formal wie folgt aussieht (vgl. [16], § 15):

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Das bedeutet, dass auch die allgemeine Relativitätstheorie aus dem Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs ableitbar ist.

³⁸ Siehe [4], [15], [9] und [16]

Noch ein paar Worte zum Einsteinschen allgemeinen Relativitätspostulat³⁹. Das allgemeine Relativitätspostulat ist immer erfüllt, wenn das Hamiltonsche Prinzip als Basis benutzt wird⁴⁰. Dann bedeutet das auch, dass die Anwendung des Prinzips des kleinsten Ressourcenverbrauchs das allgemeine Relativitätspostulat immer erfüllen lässt. **Möglicherweise darf man diesen Zusammenhang so interpretieren, dass das allgemeine Relativitätspostulat eine der Folgen des Prinzips des kleinsten Ressourcenverbrauchs ist.**

Aus meiner Sicht ist das allgemeine Relativitätspostulat eine direkte Folge dessen, dass eine Geometrie, die ja durch ein entsprechendes Koordinatensystem definiert wird, ein Artefakt ist und willkürlich gewählt werden kann (s. Abschn. 3.1). Dagegen ist die Mikrostruktur der Raumzeit durch die Postulate P.1 (das Zeit-Ensemble Postulat) und P.3 (das Raumquanten Postulat) festgelegt, s. Abschn. 1.2 bzw. 3.1, wobei dort keinerlei Annahmen über eine konkrete Geometrie gemacht wurden. Da eine Geometrie ein Artefakt, ein Beschreibungsinstrument darstellt, dürfen die Gesetze der Physik von einer konkreten Geometrie nicht abhängen. Daraus lässt es sich darauf schließen, dass ein Gravitationsfeld nicht die *Geometrie* der Raumzeit beeinflusst, sondern die *tatsächliche Mikrostruktur* der Raumzeit. Dafür spricht auch die Tatsache, dass die Gravitationskonstante G sowohl mit der Größe des Zeitquants als auch des Raumquants zusammenhängt und somit die Diskretität der Raumzeit mitbestimmt⁴¹.

Spekulative Überlegungen

Wie in Abschn. 2.1.4 bereits diskutiert wurde, braucht die Natur mindestens ein Wirkungsquant aufzuwenden, um einen beobachtbaren Makrozustand zu erzeugen; d.h. bei jedem einen Zeitschritt wird mindestens ein Wirkungsquant „fällig“, also die Mindestwirkung

\hbar . Diesen Umstand kann man wie folgt aufschreiben: $\min S_{\text{einZeitschritt}} \equiv \sum_{j=1}^1 \mathcal{L} \cdot t_p \equiv \mathcal{L} \cdot t_p = \hbar$

(das Integrieren wurde durch das Summieren - hier über einen einzigen Zeitschritt - ersetzt, weil die Zeitschritte kein Kontinuum darstellen). Daraus ergibt sich der minimale Wert der Lagrange-Funktion:

$$\min \mathcal{L} = \frac{\hbar}{t_p} = E_p = m_p c^2.$$

Da die Lagrange-Funktion – als eine Art des Translationsoperators – der Planck-Masse m_p proportional ist, vermute ich, dass die Planck-Masse ein Maß der „Trägheit“ der Natur bei den Übergängen zwischen ihren Zuständen ist. Tatsächlich, aus der Definition für m_p können wir die folgende Darstellung ableiten

$$\frac{\hbar}{G} = m_p^2 \cdot c$$

³⁹ Gesetze der Physik müssen in allen auf der Raumzeit möglichen Gaußschen Koordinatensystemen die gleiche Form haben, d.h. sie müssen allgemeine Koordinaten-Kovarianz aufweisen

⁴⁰ vgl. [3]

⁴¹ Das Quotient G/c spiegelt aus meiner Sicht die Diskretität der Raumzeit wider.

Wenn man \hbar als Diskretität von *Objektzuständen* und G/c – als Diskretität der *Raumzeit* interpretiert, dann ist die Planck-Masse m_p ein Maß der „Balance“ zwischen der Diskretität von Objektzuständen und der Diskretität der Raumzeit. Sind die Objektzustände fast kontinuierlich ($\hbar \rightarrow 0$), kann die Natur fast unendlich viele Zustände „dicht“ aneinander realisieren, so dass ihre „Trägheit“ klein ist. Ist die Raumzeit fast kontinuierlich ($G/c \rightarrow 0$), muss die Natur fast unendlich viele Translationen in der Raumzeit durchführen, um einen bestimmten Makrozustand zu erreichen, so dass ihre „Trägheit“ groß ist.

Eine Darstellung in Form vom Produkt der Diskretitäten gibt es auch für die Planck-Länge l_p :

$$\hbar \cdot \frac{G}{c} = c^2 \cdot l_p^2.$$

Nun spekuliere ich weiter, dass es nicht ausgeschlossen ist, dass das Maß der „Trägheit“ der Natur für *Raumtranslationen die Inertialmasse*, für *Zeittranslationen (Zeitschritte) – die Gravitationsmasse* darstellt. Das würde ihre in der allgemeinen Relativitätstheorie angenommene Äquivalenz erklären.

Man könnte noch weiter spekulieren und annehmen, dass die Werte der Zeit- und Raumquanten - t_p bzw. l_p - keine Konstanten sind, sondern variieren können (das setzt, natürlich, das Variieren mindestens einer Naturkonstante voraus, z.B. G , weil sie die Diskretität der Raumzeit widerspiegelt). In diesem Fall würden wir unsere wahrnehmbare / beobachtbare Raumzeit⁴² als ungleichmäßig, gekrümmt wahrnehmen.

Fixiert man die Zeit- und Raumquanten $t_p = 1$ und $l_p = 1$ als Etalone in einem „natürlichen“ Einheitensystem, kommt man auf die Vorstellung, dass sich beide Diskretitäten \hbar und G/c variieren könnten. Das Variieren der Diskretität der Raumzeit würden wir als eine ungleichmäßige, gekrümmte Raumzeit wahrnehmen; für die Wahrnehmung des Variierens der Diskretität von Objektzuständen habe ich noch keine Vorstellung.

Das Ende der spekulativen Überlegungen

So kommen wir zum Schluss, dass

- (i) Das Einsteinsche Prinzip der Existenz der maximalen Geschwindigkeit für Übertragung von Wechselwirkungen eine Folge des Zeit-Ensemble-Postulats und des Raumquanten-Postulats darstellt.
- (ii) Alle Transformationsformeln für Koordinaten sowie die Einsteinsche Formel für Addition von Geschwindigkeiten sich aus diskreten Mikrozuständen des Ensembles in der Zeit (P.1) und im Raum (P.3) ableiten lassen (spezielle Relativitätstheorie);
- (iii) Die Relativitätsdynamik sich aus dem Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2) ableiten lässt;
- (iv) Vorhersagen der Relativitätstheorien (sowohl der Speziellen als auch der Allgemeinen) bei kleineren Zeitspannen und / oder Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichen dürften. Dies gründet in

⁴² die ja die Mikrostruktur der Zeit und des Raums lediglich *abbildet*, s. die *Grundsätzliche Anmerkung 2* in Abschn. 3.1

widersprüchlicher Betrachtung einer *endlichen* maximalen Geschwindigkeit von Raumtranslationen und *kontinuierlicher* Raumzeit.

4.4 Elektrodynamik

Für Elektrodynamik wird die gleiche Geometrie angenommen, wie für die spezielle Relativitätstheorie: Die Euklidische Geometrie, also ein kontinuierliches und nicht gekrümmtes Koordinatensystem (\mathbf{r}, t) , s. Abschn. 4.3.1. Das bedeutet, dass alle daraus resultierenden Eigenschaften und Einschränkungen, die in Abschn. 4.3 ausführlich besprochen wurden, auch für die Elektrodynamik gelten, wie z.B. der Widerspruch zwischen der Einschränkung der maximalen Geschwindigkeit von Raumtranslationen ($c < \infty$) und dem gleichzeitigen Benutzen der kontinuierlichen Raumzeit, was das klassische Limit $c \rightarrow \infty$ bedeutet.

Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper mit der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld mit dem magnetischen Fluss Φ^m aus einem Punkt A in einen Punkt B, ist der Beitrag des Feldes zur Phasenänderung⁴³

$$\Phi_{AB}^{em} = \frac{S_{AB}^{em}}{\hbar} = \frac{q\Phi_{AB}^m}{\hbar},$$

wobei S_{AB}^{em} den Beitrag des Feldes zur Wirkung auf dem Weg von A nach B darstellt.

Der magnetische Fluss ist definiert als

$$\Phi_{AB}^m \equiv \int_{A \rightarrow B} \mathbf{A} ds - \int_{A \rightarrow B} \varphi dt \equiv \sum_{i=1}^4 A_i x^i,$$

wobei \mathbf{A} das Vektorpotential und φ – das Skalarpotential (elektrostatisches Potential) sind; A_i ist eine äquivalente Darstellung im Minkowski-Raum: $A_i \equiv (\varphi, \mathbf{A})$.

Dann ist der elektromagnetische Beitrag zur Wirkung (der Anteil der Wechselwirkung zwischen dem Feld und dem geladenen Teilchen)

$$\begin{aligned} S_{AB}^{em} &\equiv q \left[\int_{A \rightarrow B} \mathbf{A} ds - \int_{A \rightarrow B} \varphi dt \right] = q \int_{A \rightarrow B} \left[\frac{d}{dt} \int_{A \rightarrow B} \mathbf{A} ds - \varphi \right] dt = q \int_{A \rightarrow B} \left[\frac{d}{dt} \int_{A \rightarrow B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} dt - \varphi \right] dt = \\ &= q \int_{A \rightarrow B} [\mathbf{A} \mathbf{v} - \varphi] dt \end{aligned}$$

Die Wirkung des Feldes an sich (ohne geladene Teilchen) ist

$$S_{AB}^{ff} \equiv -4\pi\epsilon_0 c \int_{A \rightarrow B} F_{ik} F^{ik} d\Omega,$$

⁴³ Bitte beachte hier, dass Φ_{AB}^{em} die Phasenänderung und Φ_{AB}^m den magnetischen Fluss darstellt.

wobei $F_{ik} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ den Tensor des elektromagnetischen Felds darstellt und $d\Omega \equiv c dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ⁴⁴.

So ist der Ausdruck für die vollständige Wirkung (auch mit dem Anteil des freien Teilchens):

$$S_{AB} \equiv - \int_{A \rightarrow B} mc ds - \frac{1}{c} \int_{A \rightarrow B} A_i j^i d\Omega - 4\pi\epsilon_0 c \int_{A \rightarrow B} F_{ik} F^{ik} d\Omega, \quad (4.21)$$

wobei $j^i = (\rho, \mathbf{j})$ die Stromdichte im Minkowski-Raum ist.

Nun lässt sich das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung (das sich aus dem Postulat P.2 ableitet) auf zwei unterschiedliche Art und Weisen anwenden:

- a) Entweder variiert man die Trajektorie eines Teilchens, wobei das Feld selbst fixiert bleibt. In diesem Fall erhält man Bewegungsgleichungen für das Teilchen im Feld;
- b) Oder variiert man Feldpotentiale (die dann als „Koordinaten“ auftreten), wobei die Trajektorie des Teilchens fixiert bleibt. In diesem Fall erhält man Feldgleichungen für das Feld.

Variiert man also S_{AB} (4.21) nach Koordinaten (die übliche Langrange-Gleichung), erhält man zwei der bekannten Maxwell-Gleichungen (Kraft-Gleichungen)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

sowie die Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B})$.

Variiert man nun S_{AB} (4.21) nach Feldpotentialen, erhält man weitere zwei Maxwell-Gleichungen (Wellen-Gleichungen)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} &\equiv -\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &\equiv -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

sowie die Kontinuitätsgleichung für die Ladungs- und die Stromdichten $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (das Ladungserhaltungsgesetz).

Die Einzelheiten findet man z.B. in [11], Kap. 3, §§ 16-17, Kap. 4, §§ 26-30 sowie in [5], Vol. 2, Kap. 15 „The vector potential“, § 5.

⁴⁴ $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ spiegelt aus meiner Sicht die Diskretität des „Ladungsraums“ wider. $(4\pi\epsilon_0)^{-1} / c$ ist die Planck-Impedanz.

So kommen wir zum Schluss, dass

- (i) Elektrodynamik sich aus dem Prinzip des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2) ableiten lässt;
- (ii) Vorhersagen der Elektrodynamik (auch der Quantenelektrodynamik) bei kleineren Zeitspannen und / oder Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichen dürften. Dies gründet in widersprüchlicher Betrachtung einer *endlichen* maximalen Geschwindigkeit von Raumtranslationen und *kontinuierlicher* Raumzeit. In diesem Zusammenhang möchte ich anmerken, dass die klassische Elektrodynamik, die nicht nur die Mikrostruktur der Raumzeit vernachlässigt, sondern auch Zustände von Objekten sowie den „Ladungsraum“ als *kontinuierlich* und geladene Teilchen als geometrische Punkte betrachtet, bereits bei viel größeren als $100 \cdot l_p$ Abständen von der

Realität abweicht, nämlich bei $r \sim (4\pi\epsilon_0)^{-1} \frac{e^2}{mc^2}$.

4.5 Statistische Physik

Der bekannte Poincaré-Misra-Satz lässt sich auf eine anschauliche Formel bringen: Es ist unmöglich, Thermodynamik durch deterministische Gleichungen der Dynamik auszudrücken. Das ist eine überaus wichtige Feststellung, die u.a. die Existenz von verschiedenen Ansätzen, die Eigenschaften von statistischen Systemen zu beschreiben, verständlich macht. Diese verschiedenen Ansätze möchten wir nun betrachten.

a) Statistischer Ansatz der unvollständigen Informationen

Dieser Ansatz basiert auf deterministischer Dynamik. Die logische Kette, die dabei benutzt wird, beginnt mit dem Hamilton-Prinzip (das sich aus dem Postulat P.2 ableitet). Daraus werden die kanonischen Gleichungen der Dynamik abgeleitet, aus denen wiederum die Liouville-Gleichung folgt, die zum Ausdruck bringt, dass der dynamische Phasenraum (q, p) nicht komprimierbar ist. Aus der Liouville-Gleichung lässt sich die BBGKY⁴⁵ Hierarchie ableiten. Diese Hierarchie stellt ein System der Integro-Differentialgleichungen für partielle Verteilungsfunktionen dar, wobei die Verteilungsfunktion eines Rangs (n) durch die Verteilungsfunktion des Rangs (n+1) ausgedrückt wird. Für weitere Informationen s. z.B. [1].

Der Preis für die Nutzung der deterministischen Dynamik ist eine *unendliche* Kette der partiellen Verteilungsfunktionen in der BBGKY Hierarchie. Ein weiterer Preis, der bei diesem Ansatz zu entrichten ist, sind alle Einschränkungen, die durch Nichtbeachtung der diskreten Mikrostruktur der Raumzeit eintreten (s. Abschn. 4.1 - 4.3).

b) Kinetische Gleichungen

⁴⁵ Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon

Kinetische Gleichungen für Verteilungsfunktionen führen im Allgemeinen einen Stossterm ein, der zwar von einer zu anderer kinetischen Gleichung unterschiedlich modelliert wird (Boltzmann, Fokker-Planck, Landau), allerdings immer vom zufälligen Zusammenstoßen einer statistischen Menge von Teilchen eines Systems ausgeht. Genau durch einen solchen Stossterm führen die kinetischen Gleichungen die Unumkehrbarkeit der Evolution des Systems ein. Vernachlässigt man in diesen Gleichungen den Stossterm, bekommt man eine Beschreibung eines Systems im Gleichgewicht: Der Entropiezuwachs ist dann gleich Null. Für weitere Informationen sei es auf [13] verwiesen.

Kinetische Gleichungen setzen auch eine kontinuierliche Raumzeit voraus, so dass auch hier alle Einschränkungen, die durch Nichtbeachtung der diskreten Mikrostruktur der Raumzeit eintreten, zu berücksichtigen sind (s. Abschn. 4.1 - 4.3).

c) Mikroskopische Entropie als Operator der thermodynamischen Evolution

Prigogine und Misra betrachten Dynamik und Thermodynamik – ausgehend aus dem Poincaré-Misra-Satz – als komplementär. Sie führen Operatoren für mikroskopische Entropie \hat{M} und für die systemindividuelle Zeit \hat{T} ein, wobei der Operator \hat{M} mit dem dynamischen Liouville-Operator \hat{L} nicht kommutiert.

Dadurch lässt sich die Unumkehrbarkeit der Zeit beschreiben. Eine konkrete Zeitrichtung (das Selektionsprinzip nach Prigogine) wird hierbei so gewählt, dass die Entropie eines Systems in der Zukunft größer ist, als die Entropie des Systems in der Vergangenheit. Die Gegenwart nach Prigogine ist kein unendlich kleiner „Punkt“ auf der Zeitachse, sondern eine bestimmte Zeitspanne (aus meiner Sicht entspricht diese Zeitspanne „Gegenwart“ genau der Existenzdauer eines entsprechenden Prozesses, solange dieser Prozess sich selbst identisch⁴⁶ bleibt). Im Kontext der aktuellen Arbeit entspricht die minimal mögliche Dauer der „Gegenwart“ dem Wert des Zeitquants. Für weitere Informationen s. [17], Kap. 8-10.

Der Prigogine-Misra Ansatz stellt aus meiner Sicht einen großen Schritt nach vorne im Verständnis der Thermodynamik selbst und ihrer inneren Beziehung zur deterministischen Dynamik dar. Obwohl es dort eine diskrete Mikrostruktur der Raumzeit nicht direkt angesprochen wird, lässt die Einführung der Entropie- und Zeitoperatoren mit diskreten Eigenwerten zumindest die diskrete Mikrostruktur der Zeit adäquater abbilden.

d) Gibbs-Ensembles

Unabhängig von diesen drei vorangegangenen grundsätzlich unterschiedlichen Ansätzen sind die Gibbs-Ensembles zu betrachten. Die Gibbs-Ensembles sind weder von der deterministischen Dynamik noch von Kinetik noch von Thermodynamik abhängig: Sie lassen sich aus der Vorstellung der Existenz von diskreten Zuständen und aus dem Prinzip der gleichen A-Priori-Wahrscheinlichkeiten ableiten (s. z.B. [1], Kap. 4). Dieses Prinzip stellt eine *kognitive* Komponente der Betrachtung dar und sagt darüber aus, wie ein „Betrachter“ mit der Information umgehen soll, die ihm ein System über sich selbst verfügbar macht.

Das Prinzip der gleichen A-Priori-Wahrscheinlichkeiten ist ein spezieller Fall des „Maximum-Entropie Prinzips“⁴⁷. Das Letztere bedeutet für die statistische Physik: „Unter

⁴⁶ im Bohrschen Sinne

⁴⁷ Eine Methode der Bayesischen Statistik

allen Zuständen eines physikalischen Systems, die kompatibel mit dem vorhandenen Wissen über das System sind, ist der zu wählen, welcher die Entropie maximiert“, siehe [10].

Der Ansatz, der in der aktuellen Arbeit gewählt wurde, löst u.a. einige grundsätzliche Probleme der statistischen Physik.

Zum einen, die Unumkehrbarkeit der Zeit als Tatsache an sich folgt direkt aus der Komplementarität der probabilistischen Zukunft und der deterministischen Vergangenheit (s. Abschn. 2.1.3).

Zum anderen, die konkrete Zeitrichtung, wie wir sie beobachten, lässt sich auch aus der Komplementarität der probabilistischen Zukunft und der deterministischen Vergangenheit direkt ableiten (s. Abschn. 2.1.3).

Der innere „Mechanismus“, der für die Unumkehrbarkeit der Zeit und ihre Richtung verantwortlich ist, ist das Entscheiden von Alternativen (s. Abschn. 2.2.2).

Aus der Unumkehrbarkeit der Zeit und ihrer konkreten Richtung folgt direkt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik über die Zunahme der Entropie im Laufe der Zeit (Clausius, Boltzmann). Darin liegt auch der Unterschied zum Ansatz von Prigogine-Misra: Sie *postulieren* die wahrnehmbare/beobachtbare Zeitrichtung durch das Selektionsprinzip (nach Prigogine) so, dass der zweite Hauptsatz erfüllt ist (s. [17], Kap. 10, Entropy Barrier).

Zum dritten, das Ergoden-Problem löst sich durch das Zeit-Ensemble-Postulat P.1 automatisch, s. Abschn. 1.4.

Zum Schluss dieses Abschnitts möchte ich anmerken, dass die beobachtbare Natur vom thermodynamischen Gleichgewicht weit entfernt ist. Tatsächlich, aus dem Postulat des kleinsten Ressourcenverbrauchs (P.2) folgt das Prinzip der maximalen Entropie und der maximalen Entropieproduktion, s. Abschn. 2.1.5. Stabilität eines isolierten statistischen Systems entspricht gerade der maximalen Entropieproduktion⁴⁸. Wenn man diesen Satz auf die Natur heuristisch überträgt, kommt man zu der Schlussfolgerung, dass die beobachtbare Natur vom Gleichgewicht weit entfernt und gleichzeitig stabil ist. Zieht man in Betracht den enormen anfänglichen Informationswert $IV_{j=0}$ eines historisch lang⁴⁹ existierenden Universums (z.B. ca. 10^{61} Bits für das Unsere, s. Abschn. 2.4), scheint diese Schlussfolgerung sehr plausibel zu sein.

⁴⁸ vgl. [17], Kap. 4, Abschn. *Theory of the thermodynamic stability*.

⁴⁹ d.h. aus menschlicher subjektiver Sicht

5 Zusammenfassung

Hauptpostulate

Die Hauptschlussfolgerungen dieser Arbeit basieren auf einer Annahme über eine *nicht kontinuierliche, diskrete* Mikrostruktur der Raumzeit sowie über eine Regel, die die Übergänge zwischen den Zuständen der Natur steuert. Diese Annahme ist in Form von Postulaten formuliert:

- P.1 (Zeit-Ensemble): Die Zeit schreitet nicht stetig fort, sondern diskret (in Zeitquanten), und jedes Zeitquant generiert genau einen Mikrozustand der Natur. Dieser diskrete Zeitfluss lässt ein Ensemble von Mikrozuständen entstehen.
- P.2 (kleinster Ressourcenverbrauch): Ensembles von Mikrozuständen (Makrozustände) bilden sich so, dass die hierfür notwendige Naturressource am „sparsamsten“ verbraucht wird.
- P.3 (Raumquanten): Der Raum ist kein Kontinuum, sondern ist diskret. Es gibt ein elementares Element des Raums – das Raumquant (das kleinste Raumintervall). Zu jedem Zeitschritt – also in jedem Mikrozustand der Natur – nimmt ein materielles Objekt genau *eine* bestimmte Menge von Raumquanten ein.

Hauptschlussfolgerungen

Die wichtigsten Zusammenhänge, die aus diesen Postulaten folgen, sind:

- 1) Die Zukunft und die Vergangenheit haben grundsätzlich unterschiedliche, komplementäre Charaktere: Die Zukunft ist *probabilistisch*, die Vergangenheit ist dagegen *deterministisch*. Beobachtbare und existenzfähige Zustände der Natur können nur probabilistisch und unmöglich deterministisch sein. Die *Heisenbergschen Unschärferelationen* spiegeln die Bedingung der Beobachtbarkeit von Zuständen wider und somit ihre Eigenschaft, probabilistisch zu sein. Die Gegenwart dürfte eine deterministisch-probabilistische Synthese darstellen, weil sie probabilistisch entsteht und deterministisch abtritt.
- 2) Eine unmittelbare Folge der grundsätzlich unterschiedlichen, komplementären Charaktere der Zukunft und der Vergangenheit (probabilistisch vs. deterministisch) ist, dass das Fortschreiten der Zeit *gerichtet* und *unumkehrbar* ist.
- 3) „Bewegung“ in die Zukunft besteht im immerwährenden Entscheiden von Alternativen⁵⁰ und jede bereits entschiedene Alternative (präziser: das Faktum

⁵⁰ Es kann binäre, trinäre, teträre, usw. Alternativen geben: Dimension einer Alternative $\alpha \geq 2$;

Ein tieferer Grund für den Unterschied zwischen der Shannon und der thermodynamischen Entropie wurde verständlich: Die Informationsentropie (Shannon) ist auf der Menge ausschließlich der binären ($\alpha = 2$)

dessen, dass eine Alternative entschieden wurde) ist unumkehrbar: Ein Akt des Entscheidungstreffens überführt die Zukunft in die Vergangenheit. In diesem Zusammenhang ist die reale Evolution der Natur *grundsätzlich unumkehrbar*.

- 4) Der einzig realisierbare Weg beim Übergang der Natur aus einem Makrozustand A in einen Makrozustand B des Ensembles ist ein solcher, wo die für diesen Übergang notwendige Ressource R_{AB} minimiert und die Entropie des Ensembles der entsprechenden Mikrozustände \mathcal{E}_{AB} maximiert (*das Prinzip der maximalen Entropie*) wird.

Das *Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung* ist diesen Aussagen äquivalent und lässt sich aus dem Ressourcenverbrauch Postulat P.2 ableiten.

Das Prinzip der maximalen Entropie bedeutet, dass die Natur sich so entwickelt, dass sie maximal mögliche Entropie produziert. Auf anderer Seite, sind das selbstorganisierte Objekte, die maximale Entropie generieren. D.h., dass Entstehung von selbstorganisierten Objekten und ihren Assoziierungen⁵¹ eher einen sehr wahrscheinlichen Evolutionsweg der Natur darstellt.

- 5) Die Entropie des Natur-Ensembles wächst bei jedem Zeitschritt um durchschnittlich 1 Bit. Dementsprechend verringert sich der Informationswert $IV_{j=N}$ des Makrozustands des Natur-Ensembles um durchschnittlich 1 Bit pro Zeitschritt.
- 6) Beim Fortschreiten der Zeit um genau einen Zeitschritt (ein Zeitquant) kann der durch ein Objekt eingenommene Raum sich um höchstens ein Raumquant ändern. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit von Raumtranslationen ein *natürliches* Limit (Obergrenze) hat, nämlich genau eine Raumtranslation pro Zeitschritt.

Das *Einsteinsche Prinzip* der Existenz der maximalen Geschwindigkeit für Übertragung von Wechselwirkungen stellt eine Folge des Zeit-Ensemble-Postulats P.1 und des Raumquanten-Postulats P.3 dar.

- 7) „Information“ als Begriff lässt sich adäquat als „Veränderung des Grades der Unbestimmtheit“ im Rahmen eines Systems definieren.
- 8) Alle bisher bekannten physikalischen Dynamik-Gleichungen lassen sich aus dem Hamilton-Prinzip und somit aus dem Ressourcenverbrauch-Postulat P.2 ableiten. Die Tatsache, dass die Zeit darin als ein *umkehrbarer* Parameter fungiert, ist darauf zurückzuführen, dass die bekannten Dynamikgesetze faktisch *die Vergangenheit beschreiben* und lediglich implizit *voraussetzen*, dass dieses Verhalten in die Zukunft extrapoliert werden kann.
- 9) Auch Thermodynamik und Kinetik lassen sich aus dem Ressourcenverbrauch Postulat P.2 unter den *Zusatzannahmen* über eine bestimmte Richtung des

Alternativen definiert; die thermodynamische Entropie ist auf der Menge aller in der Natur vorkommenden Alternativen ($2 \leq \alpha < \infty$) definiert, und zwar mit ihrer „natürlichen“ Verteilung $\rho(\alpha)$. Diese „natürliche“ Verteilung bedingt den mittleren Wert der Dimension von Alternativen $\bar{\alpha} = e$ (Eulersche Zahl). *Das kann als „physikalischer“ Sinn der Eulerschen Zahl interpretiert werden.*

⁵¹ biologische Objekte gehören auch der Klasse von selbstorganisierten Objekten an; ihre Assoziierungen stellen Gesellschaften dar.

Zeitflusses bzw. über stochastische Zusammenstöße ableiten.

In der aktuellen Arbeit folgen sowohl die Unumkehrbarkeit der Zeit als auch die konkrete Zeitrichtung direkt aus der Komplementarität der probabilistischen Zukunft und der deterministischen Vergangenheit.

Aus der Unumkehrbarkeit der Zeit und ihrer konkreten Richtung folgt direkt der zweite Hauptsatz der Thermodynamik über Zunahme der Entropie im Laufe der Zeit.

Das Ergoden-Problem löst sich durch das Zeit-Ensemble-Postulat P.1 automatisch: Das Mitteln über die Zeit stellt faktisch das Mitteln über das entsprechende Ensemble dar, das durch den „Zeitfluss“ generiert wird.

- 10) Die beobachtbare Natur ist vom Gleichgewicht weit entfernt und gleichzeitig stabil. Der anfängliche Informationswert $IV_{j=0}$ eines historisch lang⁵² existierenden Universums muss enorm groß sein⁵³, was diese Schlussfolgerung sehr plausibel macht.

Was physikalische Theorien ignorieren

Klassische Dynamik:

Das klassische Limit $\hbar \rightarrow 0$ würde einen unendlich großen Ressourcenverbrauch der Natur bedeuten, wenn die Letztere diese Konstellation $\hbar = 0$ tatsächlich realisiert hätte. Eine kontinuierliche Raumzeit würde – konsequent angewandt – das Limit $c \rightarrow \infty$ erzwingen.

Vorhersagen der klassischen Dynamik sind solange gültig, wie lange Zustände von Objekten und die Raumzeit als kontinuierlich betrachtet werden dürfen, d.h. u.a. wenn $mcr \gg \hbar$ (Kontinuität von Zuständen) sowie $t \gg t_p$ ⁵⁴ und $r \gg l_p$ ⁵⁵ (Kontinuität der Raumzeit).

Quantenmechanik:

Der grundsätzliche Widerspruch der „klassischen“ Quantenmechanik besteht darin, dass sie *diskrete* Zustände eines Objekts (durch $\hbar \neq 0$) in der *kontinuierlichen* Raumzeit betrachtet. Da eine so definierte Zeitkoordinate die Mikrostruktur der Zeit ignoriert, geht auch die Entscheidung von Alternativen und somit das Probabilistisch-Sein der Zukunft verloren: Die Zeitkoordinate wird umkehrbar.

In dieser widersprüchlichen Betrachtung gründet die Schlussfolgerung, dass Vorhersagen der „klassischen“ Quantenmechanik bei kleineren Zeitspannen und / oder Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichen dürfen.

Relativitätstheorien und Elektrodynamik:

⁵² d.h. aus menschlicher subjektiver Sicht

⁵³ z.B. ca. 10^{61} Bits für das Unsere

⁵⁴ Planck-Zeit

⁵⁵ Planck-Länge

Das klassische Limit $c \rightarrow \infty$ setzt keine diskrete, sondern eine kontinuierliche Raumzeit voraus. Außerdem würde es einen unendlich großen Ressourcenverbrauch der Natur bedeuten, wenn die Letztere diese Konstellation $c \rightarrow \infty$ tatsächlich realisiert hätte. In dieser Beziehung ist das Limit $c \rightarrow \infty$ dem Limit $\hbar \rightarrow 0$ ähnlich.

Der grundsätzliche Widerspruch in den Relativitätstheorien (sowohl der Speziellen als auch der Allgemeinen) und in der Elektrodynamik besteht darin, dass sie korrekterweise die maximale Geschwindigkeit von Raumtranslationen *einschränken* ($c < \infty$)⁵⁶ und gleichzeitig und weiterhin die *kontinuierliche* Raumzeit benutzen, was das klassische Limit $c \rightarrow \infty$ bedeutet. Da eine so definierte Zeitkoordinate die Mikrostruktur der Zeit ignoriert, geht auch die Entscheidung von Alternativen und somit das Probabilistisch-Sein der Zukunft verloren: Die Zeitkoordinate wird umkehrbar.

In dieser widersprüchlichen Betrachtung gründet die Schlussfolgerung, dass Vorhersagen der Relativitätstheorien und der Elektrodynamik bei kleineren Zeitspannen und / oder Raumabständen (kleiner als etwa $100 \cdot t_p$ bzw. $100 \cdot l_p$) von der Realität abweichen dürfen.

Statistische Physik:

Der statistische Ansatz der unvollständigen Informationen (BBGKY-Hierarchie) und der Ansatz der kinetischen Gleichungen vernachlässigen die *diskrete* Mikrostruktur der Raumzeit und erfahren dadurch die daraus folgenden Widersprüche je nach dem, ob eine konkrete Betrachtung nun klassisch oder quantenmechanisch ist.

Lediglich der Ansatz der mikroskopischen Entropie als Operator der thermodynamischen Evolution von Prigogine bildet die diskrete Mikrostruktur der Zeit und ihre Unumkehrbarkeit durch Einführung der Entropie- und Zeitoperatoren adäquater ab.

Nur der Ansatz von Gibbs-Ensembles ist von den Annahmen über eine konkrete Mikrostruktur der Raumzeit unabhängig: Er lässt sich aus der Vorstellung von Existenz von *diskreten* Zuständen und aus *dem Prinzip der gleichen A-Priori-Wahrscheinlichkeiten* ableiten. Dieses Prinzip stellt eine *kognitive* Komponente der Betrachtung dar und sagt darüber aus, wie ein „Betrachter“ mit der Information umgehen soll, die ihm ein System über sich selbst verfügbar macht.

Was uns auf diesem Weg weiter bringen kann

- a) Um die bekannten Grundsatzwidersprüche in den physikalischen Theorien wirklich zu beseitigen, reicht es nicht aus, einfach zu postulieren, dass $\hbar > 0$ und/oder $\frac{G}{c} > 0$ ist. Man sollte *sowohl Objektzustände als auch die Raumzeit konsequent als diskret beschreiben*: Daraus ergäbe sich dann notwendiger- und widerspruchsfreierweise, dass Diskretität von Objektzuständen (\hbar) und Diskretität der Raumzeit (G/c) größer Null sind. Das gleiche dürfte sich auch auf Diskretität des „Ladungsraums“ $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ beziehen.

⁵⁶ allerdings durch ein spezielles Postulat, ohne einen theoretisch-physikalischen Grund hierfür anzugeben

- b) Es ist anzunehmen, dass der mathematische Apparat der diskreten Markow-Ketten gut geeignet ist, diese Art der Evolution der Natur – das diskrete Fortschreiten der Zeit durch Entscheidungen von Alternativen – mathematisch abzubilden.
- c) Es wäre interessant zu erforschen, ob die konkreten Werte der universellen physikalischen Konstanten im Rahmen eines Universums vom dessen anfänglichen (oder auch aktuellen?) Informationswert $IV_{j=0}$ abhängen.
- d) Es ist wahrscheinlich, für sehr kleine Ensembles von Mikrozuständen eine Abweichung eines *realisierten* Makrozustands von seinem *theoretisch erwarteten* Pendant festzustellen. Eine solche Abweichung würde die Postulate dieser Arbeit bestätigen.

Eine direkte experimentelle Überprüfung der Postulate P.1 – P.3 ist offensichtlich nur auf kleinen Ensembles von Mikrozuständen, und, infolgedessen, bei sehr kleinen Zeitspannen bzw. sehr großen Energien möglich. Die charakteristische Zeitspanne für so ein kleines Ensemble hat die Größenordnung maximal $10^3 \cdot t_p$ Zeitschritte, also $\approx 5 \cdot 10^{-41}$ Sek. Die äquivalenten Energien liegen im Bereich von mindestens $10^{-3} \cdot E_p \approx 10^{16}$ GeV⁵⁷.

Bei solchen kleinen Zeitspannen bzw. großen Energien wird der *realisierte* Makrozustand grundsätzlich immer weniger vorhersagbar (und, daher, auch immer weniger kontrollierbar), weil er ja grundsätzlich probabilistisch ist.

⁵⁷ E_p – Planck-Energie

6 Anhang

6.1 A.1: Entropie eines Zustandengenerators

Es sei:

- Z – Anzahl der Auswahlmöglichkeiten / Zustände (z.B. ein Würfel mit Z Seiten);
- $I \equiv \log_2 Z$;
- Alle Zustände sind unterschiedlich;
- p_k – die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Zustands k , $k = 1, \dots, Z$, so dass $\sum_{k=1}^Z p_k = 1$;
- Die Shannon-Entropie eines Zustandengenerators ist definiert als $\mathcal{E} \equiv -\sum_{k=1}^Z p_k \log_2 p_k$.

Definieren wir Abweichung δ_k so, dass $p_k = \frac{1}{Z}(1 + \delta_k)$. Da $0 \leq p_k \leq 1$, $\Rightarrow 1 \leq \delta_k \leq Z - 1$.

Aus der Bedingung $\sum_{k=1}^Z p_k = 1$ folgt $\frac{1}{Z}(1 + \delta_k) = 1 \Rightarrow 1 + \sum_1^Z \delta_k = 1 \Rightarrow \sum_1^Z \delta_k = 0$.

Dann $\mathcal{E} = -\sum_{k=1}^Z \frac{1}{Z}(1 + \delta_k) \log_2 \frac{1 + \delta_k}{Z}$.

Wenn $\delta_k \equiv 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{Z} \log_2 Z \cdot \sum_1^Z 1 = \log_2 Z$. Also,

$$\boxed{\mathcal{E}(\delta_k \equiv 0) = \log_2 Z \equiv I}$$

Definieren wir $\mathcal{E}_k(\delta_k) \equiv -p_k \log_2 p_k = -\frac{1}{Z}(1 + \delta_k) \log_2 \frac{(1 + \delta_k)}{Z}$.

Dann $\mathcal{E}_k(0) = \frac{1}{Z} \log_2 Z$;

$\mathcal{E}'_k(\delta_k) = \frac{1}{Z} \log_2 \frac{(1 + \delta_k)}{Z} - \frac{1}{Z}(1 + \delta_k) \frac{Z}{1 + \delta_k} \log_2 e \cdot \frac{1}{Z} = -\frac{1}{Z} \log_2 \frac{e(1 + \delta_k)}{Z}$; $\mathcal{E}'_k(0) = \frac{1}{Z} \log_2 \frac{Z}{e}$;

$\mathcal{E}''_k(\delta_k) = \frac{1}{Z} \frac{Z}{e(1 + \delta_k)} \cdot \frac{e}{Z} \cdot \log_2 e = -\frac{1}{Z} \frac{\log_2 e}{1 + \delta_k}$; $\mathcal{E}''_k(0) = \frac{1}{Z} \log_2 e$.

Wenn $|\delta_k| \ll 1$ (alle Zustände sind *fast* gleichwahrscheinlich), dann

$$\mathcal{E}_k(\delta_k) \approx \mathcal{E}_k(0) + \mathcal{E}'_k(0)\delta_k + \frac{1}{2}\mathcal{E}''_k(0)\delta_k^2 = \frac{1}{Z}\log_2 Z + \frac{1}{Z}\log_2(Ze^{-1})\delta_k - \left(\frac{1}{2Z}\log_2 e\right)\delta_k^2;$$

Die Shannon-Entropie

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^Z \mathcal{E}_k(\delta_k) \approx \sum_{k=1}^Z \frac{1}{Z}\log_2 Z + \frac{1}{Z}\log_2(Ze^{-1})\sum_{k=1}^Z \delta_k - \frac{\log_2 e}{2Z}\sum_{k=1}^Z \delta_k^2 = \log_2 Z - \frac{\log_2 e}{2Z}\sum_{k=1}^Z \delta_k^2.$$

Bezeichnen wir die mittelquadratische Abweichung als $\sigma \equiv \frac{1}{Z}\sum_{k=1}^Z \delta_k^2$. Dann

$$\boxed{\mathcal{E}(\text{Shannon}) \approx \log_2 Z - \frac{\log_2 e}{2}\sigma = I - \frac{\log_2 e}{2}\sigma, \text{ wenn } |\delta_k| \ll 1} \quad (6.1)$$

und

$$\boxed{\mathcal{E} \leq I}.$$

D.h. die Shannon-Entropie eines Zustandengenerators ist kleiner (oder gleich) als die Informationsmenge, die er theoretisch produzieren kann. $\mathcal{E} = I$ ist nur in einem Idealfall, wenn alle Zustände des Zustandengenerators *exakt* gleichwahrscheinlich, d.h. exakt gleichmäßig verteilt sind.

Wenn manche Zustände sehr oft auftreten und andere – sehr selten (Zustände sind ungleichmäßig verteilt), dann $\mathcal{E} \rightarrow 0$. Also sagt die Entropie \mathcal{E} über die Gleichmäßigkeit der Zustandsverteilung eines Zustandengenerators aus.

6.2 A2: Geometrieneutrale Phasentranslations-Gleichung

Operator der Phasentranslation

Es sei $\hat{F}(\Delta\Phi_j)$ der Operator der Phasentranslation beim Übergang eines Systems aus dem Zustand beim Zeitschritt $(j-1)$ ($|\psi\rangle$) in den nächsten Zustand j ($|\psi'\rangle$), wobei $\Delta\Phi_j \equiv \Phi_j - \Phi_{j-1}$ die Phasenänderung bei diesem Übergang ist. Dann

$$|\psi'\rangle = \hat{F}(\Delta\Phi_j)|\psi\rangle.$$

Da die Phasen der benachbarten Zustände sich voneinander nur wenig unterscheiden dürften, gilt

$$|\psi'\rangle \approx (1 + i \cdot \Delta\hat{\Phi}_j)|\psi\rangle = (1 + i\hat{\sigma} \cdot \Delta\Phi_j)|\psi\rangle,$$

wobei $\hat{\sigma}$ der dimensionslose Operator der Phasentranslation ist. Dann lässt sich der Operator der Phasentranslation wie folgt darstellen

$$\hat{F}(\Delta\Phi_j) \approx 1 + i\hat{\sigma} \cdot \Delta\Phi_j. \quad (6.2)$$

Da die Phasenänderung $\Delta\Phi_j$ die Anzahl der hierfür notwendigen Wirkungsquanten ist

($\Delta\Phi_j = \frac{\Delta S_j}{\hbar}$, wobei ΔS_j die Wirkung darstellt, die das System braucht, um aus dem

Mikrozustand $(j-1)$ in den Mikrozustand j zu kommen, vgl. Abschn. 2.1.3), können wir aufschreiben

$$\hat{F}(\Delta S_j) \approx 1 + \frac{i}{\hbar} \hat{\sigma} \cdot \Delta S_j \text{ und}$$

$$|\psi'\rangle \approx \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{\sigma} \cdot \Delta S_j\right) |\psi\rangle. \quad (6.3)$$

Allgemeine Phasentranslations-Gleichung

Es sei $C_j(S_j) \equiv \langle j | \psi(S_j) \rangle$ die Amplitude dessen, dass das System sich im Basis-Mikrozustand j mit der Wirkung S_j befindet. Dann ist die Amplitude, in diesen Mikrozustand zu gelangen (s. (6.3)),

$$C_j(S_j) = \sum_k [\delta_{(j-1)k} + \frac{i}{\hbar} \sigma_{jk}(S_j) \cdot \Delta S_j] C_k(S_k) = C_{j-1}(S_{j-1}) + \frac{i}{\hbar} \Delta S_j \sum_k \sigma_{jk}(S_j) C_k(S_k), \text{ wobei } \delta_{jk}$$

das Kronecker-Symbol ist.

$$\text{Daraus folgt, dass } \frac{C_j(S_j) - C_{j-1}(S_{j-1})}{\Delta S_j} \equiv \frac{\Delta C_j(S_j)}{\Delta S_j} = \frac{i}{\hbar} \sum_k \sigma_{jk}(S_j) C_k(S_k).$$

So lässt sich die allgemeine Phasentranslations-Gleichung wie folgt darstellen:

$$i\hbar \frac{\Delta C_j(S_j)}{\Delta S_j} = - \sum_k \sigma_{jk}(S_j) C_k(S_k), \quad (6.4)$$

oder dimensionslos mit Phase Φ_j

$$i \frac{\Delta C_j(\Phi_j)}{\Delta \Phi_j} = - \sum_k \sigma_{jk}(\Phi_j) C_k(\Phi_k). \quad (6.5)$$

Diese *Phasentranslations-Gleichung* kennt keine Koordinaten und ist somit Geometrieneutral. Es wurden auch keine Annahmen über Differenzierbarkeit irgendwelcher Parameter gemacht.

Stationäre Zustände und Erhaltung von Observablen

Es ist interessant, dass wir für den speziellen Fall von stationären Systemen, wo ihre beobachtbaren Zustände erhalten bleiben, bekommen

$$|\psi'_0\rangle \equiv |\psi_0\rangle \Rightarrow |\psi_0\rangle = \hat{F}(\Delta \Phi_{j+1}) |\psi_0\rangle \Rightarrow \hat{F}(\Delta \Phi_{j+1}) |\psi_0\rangle = e^{im\Delta \Phi_{j+1}} |\psi_0\rangle \approx (1 + im\Delta \Phi_{j+1}) |\psi_0\rangle$$

(m ist eine ganze Zahl).

Das bedeutet, dass der dimensionslose Operator der Phasentranslation $\hat{\sigma} |\psi_0\rangle \approx m |\psi_0\rangle$ für diese speziellen Zustände der Erhaltung von Observablen einfach eine ganze Zahl m darstellt.

7 Bibliographie

- [1] R. Balescu *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, 1975
- [2] A. Einstein *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, Jahrb. D. Radioaktivität u. Elektronik, 1907, 4, 411-462
- [3] A. Einstein *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778–786
- [4] A. Einstein *Das hamiltonsche Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1916, 2, 1111–1116
- [5] R. Feynman *Feynman Lectures on Physics*, Vol. 2
- [6] R. Feynman *Feynman Lectures on Physics*, Vol. 3
- [7] R. Feynman *Quantum Mechanics and Path Integrals*, 1965
- [8] P. Glansdorff, I. Prigogine *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, 1971
- [9] D. Hilbert *Grundlagen der Physik*, 1 Mitt. Gött. Nachr., 1915
- [10] E. T. Jaynes *Information Theory and Statistical Mechanics*, in: The Physical Review. 106, No. 4, 15. May 1957, p. 620–630
- [11] Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Теоретическая Физика*, Том II, *Теория Поля*, 1988⁵⁸
- [12] Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Теоретическая Физика*, Том III, *Квантовая Механика (нерелятивистская теория)*, 1989⁵⁹
- [13] Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Теоретическая Физика*, Том X, *Физическая Кинетика*, 1979⁶⁰
- [14] А. М. Ляпунов *Лекции по теоретической механике*, 1982⁶¹
- [15] H. A. Lorentz, vier Publikationen in Publicationen d. Königl. Akad. Van Wetensch. Te Amsterdam, 1915 und 1916
- [16] W. Pauli *Relativitätstheorie*, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Band V, Heft IV, Art. 19, 1921
- [17] I. Prigogine *From being to becoming*, 1980

⁵⁸ L. Landau, E. Lifschitz *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band II *Klassische Feldtheorie*

⁵⁹ L. Landau, E. Lifschitz *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band III *Quantenmechanik (nicht relativistische Theorie)*

⁶⁰ L. Landau, E. Lifschitz *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band X *Physikalische Kinetik*

⁶¹ A. Ljapunow *Vorlesungen über Theoretische Mechanik*